Esercizi su varietà e spazi tangenti. Svolti in classe/proposti.

1. Scolgere tutti gli esercizi delle prove scritte recenti reperibili in rete.

2. Descrivere lo spazio tangente a $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = e^{x_1 x_2}\}$ in $(1, 2, e^2)$.

3. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Descrivere lo spazio tangente al grafico $x_3 = \phi(x_1, x_2)$ in un punto generico $(a_1, a_2, \phi(x_1, a_2))$.

4. Sia $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 = x_1 x_2 + x_3^2\}$. Verificare che $M$ è una varietà $C^1$ e descrivere lo spazio tangente $T_{(0,0,1,1)}M$.

5. Verificare che l'insieme di livello $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2^2 + x_3 e^{x_2 - 1} = 1\}$ ha un punto regolare in $(1, 1, 0)$ e scrivere $T_{(1,1,0)}M$.

6. Vedere se l'insieme $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3 - x_3^2 = 2\}$ ha punti singolari. Verficare che $(0, 0, 1) \in M$ è regolare e scrivere $T_{(0,0,1)}M$.

7. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la varieta' bidimensionale
$$M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = x_1 e^{x_2}\}.$$
Sia $P = (1, 1, e) \in M$. Scrivere due cammini parametrizzati di classe $C^1$, $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ che soddisfino
(A) $\gamma_1(t) \in M$, $\gamma_2(t) \in M$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;
(B) $\gamma_1(0) = P$ e $\gamma_2(0) = P$.
Esibire una scelta dei due cammini tale che $\gamma_1'(0)$ e $\gamma_2'(0)$ generino $T_P M$. [1]

8. Considerare l'insieme di livello
$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_4 = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{e} \quad x_1 e^{x_3} = 1\}.$$
Verificare che $M$ e' una varieta' regolare e descriverne lo spazio tangente in $P = (1, 0, 0, 1)$.

9. Consideriamo l'insieme $M = \{x + y = 1, y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Verificare che e' una varieta' regolare, descrivere $T_{(-1,2,-2)}M$ etrovare i punti critici vincolati per il problema
$$\max / \min(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{con vincoli} \quad x + y = 1 \quad \text{e} \quad y + z = 0.$$

10. (tratto dal libro di testo). Studiare regolarita' del vincolo e punti critici vincolati per il problema
$$\begin{cases} \max(yz + xz) \\ y^2 + z^2 = 1 \\ xz = 3. \end{cases}$$

[1] Suggerimento: leggere la dimostrazione della caratterizzazione dello spazio tangente a $M$.