Matematica. Esercizi. [1]

1. Scrivere la formula di Taylor di grado 2 e punto iniziale $x_0 = -1$ della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = e^{2x}(1 + x).$$

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \log(1 + e^{2x})$$
nel punto del grafico di f di ascissa 1.

3. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x}.$$

4. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{\pi} (1 + \sin x) \cos x \, dx.$$

5. DIre in quali intervalli e' crescente la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1 + t^4} dt.$$

6. Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ e' verificata la disuguaglianza
$$e^{x^2-1} > 1.$$

7. Scrivere la formula di Taylor di grado 2 e punto iniziale $x_0 = 1$ della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{x} + e^x.$$

8. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = e^{(x+1)^2}$$
nel punto del grafico di f di ascissa -1.

9. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{2x}.$$

10. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{3} (1 + x^3 e^{-x^4}) dx.$$

[1] Tratti dai compiti scritti degli anni precedenti

11. Calcolare la derivata della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

12. Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ e' verificata la disuguaglianza
$$\log\big(e + x\big) > 1.$$

13. Per quali $x \in \mathbb{R}$ e' verificata la disuguaglianza
$$1 - 2|e^x - 1| > 0?$$

14. Scrivere la formula di Taylor di grado 2 e punto iniziale $x_0 = 1$ della funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

15. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sin(x-1)e^x$ nel punto del grafico di f di ascissa 1.

16. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{\frac{1}{(x-2)^2}}}{e^x (x-2)^2}.$$

17. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{\pi/2} \cos x (\sin x)^{3/2} dx.$$

18. Calcolare la derivata della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_0^x (1 + \log(1+t^2)) dt.$$

19. Dire in quali intervalli e' crescente la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sqrt{1 + e^{x^2}}.$$

20. Scrivere la formula di Taylor di grado 2 e punto iniziale $x_0 = 1$ della funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x \log x$.

21. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sin(x)e^x$ nel punto del grafico di f di ascissa 0.

22. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2 - 4x + 4)}{e^x (x-2)^2}.$$

23. Calcolare l'integrale
$$\int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x}dx.$$

24. Calcolare la derivata della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_0^{\sin x} (1 + te^t)dt.$$

25. È data la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_1^x t\sqrt{1+t^2+t^4}\ dt.$$
Calcolare la derivata di F e dire in quali intervalli F è crescente.

26. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2\sin x}}{x + x^2}.$$

27. È data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}.$$
Scrivere l'equazione della retta tangente ad f nel punto del suo grafico che ha ascissa 1.

28. Scrivere la formula di Taylor di grado 2 e punto iniziale $x_0 = \pi$ della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)\sin x$.

29. Calcolare l'integrale
$$\int_0^1 \left(\sqrt{x+1} + xe^{2x}\right)dx$$

30. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = (2x - x^2)e^x,$$
determinare il massimo e il minimo della funzione f sull' intervallo $[0, 2]$.

31. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2} - e}{\sin(x-1)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x - e^{\alpha x^2}}{x + e^x\sqrt{1+x^2}}, \text{ al variare di } \alpha \in \mathbb{R};$$

32. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto (del grafico) di ascissa 1.

33. Calcolare l'integrale
$$\int_0^1 (x + x^3)e^{x^2}dx.$$

34. Dire in quali intervalli e' crescente o decrescente la funzione $f(x) = e^x\sqrt{1 + 6x^2}$.

35. (a) Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2 + \sin x} - e^{3x}}{1 + 4x^2}$.

    (b) E' data la funzione
$$f(x) = \int_0^{2x} \sin(t^2)dt.$$
    Quanto vale $f(0)$? Calcolare la derivata di f. Calcolare poi il limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

36. E' data la funzione $f(x) = |x| \sin x$. La funzione e' derivabile in $x = 0$? Se si', quanto vale $f'(0)$? Calcolare poi $f'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ in cui f e' derivabile.

37. Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} + \sqrt{1 + x^4}}{1 + 4x^2}$.

38. E' data la funzione
$$f(x) = \int_0^{2x} (e^{t^2} - 1)dt.$$
    Quanto vale $f(0)$? Calcolare la derivata di f. Calcolare poi il limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

39. E' data la funzione $f(x) = |x| \sin x$. La funzione e' derivabile in $x = 0$? Se si', quanto vale $f'(0)$? Calcolare poi $f'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ in cui f e' derivabile.

40. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log(x + e^{x^2})$ nel suo punto di ascissa 2.