

Analisi Matematica B

Ingegneria e scienze informatiche – Cesena 2018/19

Aggiornato al 16 dicembre 2018

Informazioni pratiche:

- Docenti: Daniele Morbidelli ed Eleonora Cinti (<http://www.dm.unibo.it/~eleonora.cinti5/Teaching.html>)
- Materiale di riferimento: Bramanti, Pagani Salsa, Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare)

1. Argomenti svolti (Daniele Morbidelli). Lista provvisoria

1.1. Mercoledì 17 settembre 2018 e giovedì 18 settembre 2018

Insiemi. Operazioni con gli insiemi. Insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. disuguaglianza tra numeri reali. Equazioni e disequazioni di primo grado. Equazioni e disequazioni di secondo grado. Il valore assoluto di un numero $x \in \mathbb{R}$. Funzioni $f : A \rightarrow B$. Grafico di una funzione. Le funzioni affini. (1)

Esercizi

- Risolvere le disequazioni

$$x^2 - 2x < 0, \quad 5 < x^2 + 2x, \quad bx^2 + 1 < 0, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

- Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P_1 = (1, -2)$ e $P_2 = (4, 5)$.
- Tracciare i grafici delle funzioni $f_1(x) = -x + 1$, $f_2(x) = -x + 3$ e in generale di $f(x) = -x + q$ con q qualsiasi.
- Trovare il/i punti di intersezione tra i grafici delle funzioni affini f_1 e f_2 così definite

$$f_1(x) = x + 2 \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x - 5$$

1.2. Lunedì 23 settembre, mercoledì 25 settembre, gio 24

Funzioni iniettive suriettive, biunivoche. Funzione valore assoluto. Funzioni potenza di esponente positivo. Funzione esponenziale naturale e sue proprietà. Funzioni monotone crescenti decrescenti debolmente e strettamente. Funzioni logaritmo in varie basi. Funzioni composte. Funzione inversa di una funzione biunivoca. Esempi vari. Angoli e loro misure in radianti.

Esercizi

1. Tracciare un grafico qualitativo delle funzioni

$$f(x) = \log(x^2), \quad f(x) = \log(3^x), \quad f(x) = \log((3/4)^x).$$

(il dominio della prima è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

2. Dato $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, stabilire per quali coppie $x, y \in \mathbb{R}$ vale $a^x = e^y$.
 3. Tracciare i grafici delle funzioni f_1, f_2, f_3 seguenti

$$f_1(x) = (x-1)^2, \quad f_2(x) = \log(x-1), \quad f_3(x) = -(x+2)^2$$

a partire da quelli di $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = \log x$ e $g_3(x) = -x^2$ e individuando l'opportuna traslazione.

4. Tracciare il grafico di

$$f_4(x) = 1 + x^2, \quad f_5(x) = -\frac{1}{2} + e^x$$

a partire da quelli di $g_4(x) = x^2$ e $g_5(x) = e^x$ ed individuando l'opportuna traslazione che li collega.

5. Data la funzione $f : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$

$$f(x) = 1 + (x-1)^2,$$

verificare seguendo lo schema applicato in classe che f è biunivoca individuandone nel contempo l'inversa. Fatti i conti, verificare che $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ sono l'identità su $[1, +\infty[$.

6. Esercizio analogo per la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(trucco: usare la variabile $z = e^x$...).

7. Scrivere almeno tre misure diverse (non tutte dello stesso segno) dei seguenti angoli espressi in gradi: $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 270^\circ, 315^\circ$.

Lunedì 1 ottobre

Funzioni seno, coseno, tangente e arcotangente. Loro grafici e loro proprietà di base.

Mercoledì 3 ottobre e giovedì 14 ottobre

Successioni numeriche. Limiti di successioni (definizioni). Teoremi del confronto (*) e della permanenza del segno (*). Limiti di somme, prodotti e quozienti. Punti di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$. Definizione di limite di funzione $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

Esercizi

Utilizzando gli argomenti descritti in classe, risolvere le disequazioni

$$\begin{aligned} \log(x) \leq -1 \quad \log(1+|x|) < 5 \quad 2^{x+1} < 3^x \quad 2^{x^2} < 3^x \\ e^x < e, \quad e^{x^2} < 2, \quad e^{x+5} > 7 \\ \log(1+e^x) > 5, \quad 2^x < 3, \quad 2^x > 3^{x^2} \quad e^{x^2-x-4} < 1 \quad e^{|x|+1} < 2e \end{aligned}$$

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+n+\alpha^2 n^2}}{1-n^{3/4}} \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}$$

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha (\sqrt{1+n^2} - n) \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}$$

Verificare se sono monotone crescenti le successioni (a_n) così definite

$$a_n = e^n - n, \quad a_n = \sin(n) - 2n, \quad a_n = \log(\sqrt{n}) + n - \log(n) \quad a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Usare solo la definizione. Proibito fare derivate.

Lunedì 8, mercoledì 10 e giovedì 11 ottobre

Disuguaglianza $\sin x < x < \tan(x)$ per $x \in]0, \pi/2[$ (*). Limiti destri/sinistri. Esercizi. Definizione di funzione continua (*). Definizione di punto di massimo/minimo locale e globale. Enunciato del Teorema di Weierstrass. Analisi dei limiti notevoli delle funzioni $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x - 1}{x}$ e $\log(1 + x)/x$.

Definizione di rapporto incrementale e derivata.

Esercizi

Usando i procedimenti presentati in classe, calcolare

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - \alpha x}} \quad \text{con } \alpha \geq 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-1/x}} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{1 + x^2}{\cos x} \\ & \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{x}{\sin x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|^{1/2}}{\log(1 - \sin x)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log(2 + x)}{(x - 1) \sin(x - 1)} \\ & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x - 1)^3} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\log(x^{-1})}{x - 2} \\ & \lim_{x \rightarrow 0^\pm} e^{1/x} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log(\sin^2(x)) \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\frac{1}{2} + x)}{1 - \cos x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{bx^2 + x^3} \quad \text{per ogni } b \in \mathbb{R} \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{e^x - e^{-1}} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2}}{\sin(x)} \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 1}{e^{x^2} - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log(2 + x)}{(x - 1) \sin(x - 1)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \sin(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2e^{-x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x^2 + \sin(x)) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x \cos x} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\log(x + 3)}{(x + 2)^2 \cos(x + 2)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log(2 - x)}{(x - 1) \sin(x - 1)} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} \quad \text{per ogni } a, b \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + bx)^{1/x} \quad \text{per ogni } b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lunedì 15, mercoledì 17, giovedì 18

Calcolo con la definizione delle derivate delle funzioni affini, esponenziale, logaritmo, radice e seno (*). Formula per la derivata del prodotto (*). Legame tra continuità e derivabilità (*). Derivata di quoziente. Simboli di "o piccolo" $f(x) = o((x - x_0)^k)$ per $x \rightarrow x_0$. Approssimazione di Taylor del primo ordine per funzioni derivabili (*). Formula per la derivata di funzioni composte (*).

Esercizi

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Esercizio 1.1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \cos(2x), \quad \frac{d}{dx} e^{x^2}, \quad \frac{d}{dx} \log(1 + 3x^2), \\ & f(x) = a^{x \cos x}, \quad (a > 0), \quad f(x) = \sin(1 + 2 \cos x), \end{aligned}$$

$$f(x) = (x + e^{2x} + x \sin x)^2, \quad f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + 2x^{3/2}}, \quad f(x) = \exp(\sin(x^2)),$$

$$f(x) = x^2 e^{-2x} \sin x.$$

Esercizio 1.2. Calcolare le seguenti derivate:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \sin x + 2 \cos x & f(x) &= x^2 (\sin x + 2 \cos x) & f(x) &= (2x^3 - x) (2x^3 + x) \\ f(x) &= (-x^2 + x - 1) e^x & f(x) &= 4x \sqrt{x} - 5x \sqrt[3]{x} & f(x) &= x \log x - x \\ f(x) &= \frac{2x - 1}{2x^3} & f(x) &= \frac{1}{3 \log x} & f(x) &= \frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4} \\ f(x) &= \frac{x + a^x}{x - a^x}, \quad a > 0 & f(x) &= \frac{x \log x}{\sqrt{x}} & f(x) &= \frac{1}{\sin x \cos x} \\ f(x) &= 4 \sin(2x) - 3 \cos(3x + 1) & f(x) &= \log(x^2 - 5x + 4) & f(x) &= \sqrt{x^2 - 5x + 4} \\ f(x) &= e^{x^2 - 5x + 4} & f(x) &= \sin^3 x + \sin(x^3) & f(x) &= \tan(1 + x + 3x^2) \\ f(x) &= x^4 (2x^2 - 5)^3 & f(x) &= (\log x)^2 + 3 \log x + 2 & f(x) &= x 2^{-x^2} \\ f(x) &= \log \log x & f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & f(x) &= \sqrt{\frac{4x^2 + 3}{2x - 1}} \\ f(x) &= \sqrt{\log(x^2 + 1)} & f(x) &= \left(\frac{a}{a - x} \right)^2, \quad a > 0 & f(x) &= \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0 \\ f(x) &= x^{r-1} e^{-x}, \quad r > 0 & f(x) &= x^{a-1} (1 - x)^{b-1}, \quad a, b > 0 & f(x) &= \frac{1}{1 + \exp(-x)}, \end{aligned}$$

Scrivere il polinomio di Taylor del primo ordine delle seguenti funzioni f nei punti x_0 indicati, assieme all'equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \sin(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{e} \quad x_0 = -\frac{\pi}{4} \\ f(x) &= \tan x, \quad x_0 = \pi/4 \\ f(x) &= e^{x^2 - x}, \quad x_0 = 2 \\ f(x) &= (1 + x)^\alpha, \quad x_0 = 0 \quad \text{e} \quad x_0 = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

Lezioni lun 22, mer 24, gio 25 ottobre

Esercizi

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\text{sh}(x^2 - x^3)}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 - x^3)}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^3 - e^{2x}}{x - e^{\sqrt{x+1}}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log^2 x}{1 + x^2}$$

Usando il procedimento seguito in classe tracciare i grafici delle funzioni

$$f(x) = x \log(x), \quad f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

Scrivere i polinomi di Taylor del secondo ordine delle funzioni sotto nei punti indicati e le corrispondenti formule di approssimazione Taylor

$$f(x) = \sin x, \text{ in } x_0 = 0 \text{ e } x_0 = \pi/6,$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \text{ in } x_0 = 0$$

$$f(x) = \log(1+x), \text{ in } x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}, \text{ in } x_0 = 1 \text{ e } x_0 = -2$$

Lun 29 e Mer 31 ottobre

Condizione sufficiente del secondo ordine per punti di massimo/minimo (*). Introduzione discorsiva alle somme di Riemann e all' integrale. Proprietà di linearità additività e monotonia.

Definizione di primitiva. Teor di Caratterizzazione delle primitive di una funzione f (*). Funzioni integrali. Teorema fondamentale del calcolo sulla derivata della funzione integrale. Formula di Torricelli (*).

Esercizi

Calcolare

$$\int_0^2 (2x^2 - 3x^3) dx, \quad \int_{-1}^{-3} (3e^x - 2/x) dx \quad \int_2^3 \frac{1}{x} dx \quad \int_{-4}^{-1} \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \cos(t+t^3) dt \quad \frac{d}{dx} \int_x^4 \frac{e^t}{t} dt \quad \frac{d}{dx} \int_1^{x^2} (t\sqrt{t+1} - 2) dt$$

(saranno svolti/corretti lunedì dal tutor, assieme ad altri)

Mercoledì 7 novembre, giovedì 15 novembre

Svolgimento esercizi assegnati. Formula di integrazione di funzioni del tipo $g'(g(x))f'(x)$. Formula di integrazione per parti.

Esercizi

Usando le formule di integrazione delle funzioni elementari, di quelle della forma $(g' \circ f)f'$ e di integrazione per parti calcolare

$$\begin{aligned} \int_a^b x \sin(x+1) dx \quad \int_2^3 x(e^{\pi x} - e^{-x^2}) dx, \quad \int (x^2 - x) \log(3x) dx, \quad \int \frac{dx}{x \log x}, \quad \int x \sqrt{1+x} dx \\ \int \frac{dx}{2x^2+5}, \quad \int \frac{dx}{2x^2-x-1}, \quad \int \frac{dx}{4x^2+4x-3}, \quad \int \frac{dx}{x^2-6x+10} \\ \int \frac{\sin x}{1+\cos^\alpha x} dx, \quad \text{per } \alpha = 1, 2, \quad \int (1-x^2)e^{-x+1} dx \quad \int x^3 e^{-2x^2} dx, \quad \int \sin^2(3x) dx, \quad \int x \log^2 x dx \end{aligned}$$

Lunedì 19 novembre

Formla cambio variabile negli integrali. Introduzione ai numeri complessi. Somma e prodotto

Esercizi

Calcolare

$$\int_0^{(\pi^3/8)} \sin(x^{1/3}) dx \quad \int_0^b \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{per } b > 0$$

(porre $x = \sinh t$ e usare le proprietà delle funzioni iperboliche)

Calcolare le somme e i prodotti $z + w$ e zw per $z = 1 + 2i$ e $w = -2 + i$ e per $z = -1 + 3i$, $w = \frac{1-i}{2}$, Calcolare anche tutte le potenze $i^2, i^3, i^4, i^5, \dots$ e le potenze $(1+i)^k$ per $k = 1, 2, \dots, 8$.

1.3. Esercizi sul secondo modulo

Si veda la pagina della Prof. Cinti <http://www.dm.unibo.it/~eleonora.cinti5/Teaching.html>

26 novembre

Numeri complessi, Piano di Gauss. Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso.

Esercizi (correzioni su questa pagina entro il fine settimana)

LINK ALLE SOLUZIONI

http://www.dm.unibo.it/~morbidel/compl_uno.jpg,
http://www.dm.unibo.it/~morbidel/compl_due.jpg,
http://www.dm.unibo.it/~morbidel/compl_tre.jpg

- Risolvere l'equazione algebrica $z^2 + 2z + 5 = 0$ e verificare che le soluzioni trovate risolvono davvero l'equazione richiesta.
- Scrivere il numero $z = 1 + i \in \mathbb{C}$ in forma trigonometrica $r \cos \theta + ir \sin \theta$. Applicando le proprietà del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica, calcolare le potenze

$$(1+i)^2, (1+i)^3, \dots, (1+i)^6, (1+i)^8$$

- Scrivere il numero $1 + i\sqrt{3}$ in forma trigonometrica e calcolare $(1 + i\sqrt{3})^6$. Scrivere poi il risultato in forma cartesiana $x + iy$.
- Calcolare $(1-i)^4, (2-2i)^8$.
- Dati $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ con $r_2 > 0$ seguendo il procedimento applicato in classe per scrivere $z_1 z_2$, si scriva $\frac{z_1}{z_2}$ in forma trigonometrica.
- Verificare che il prodotto scalare (=prodotto interno) tra due vettori $z, w \in \mathbb{R}^2$ si scrive, nella forma $\operatorname{Re}(z\bar{w})$, dove $\bar{w}$ indica il complesso coniugato di $w \in \mathbb{C}$.
- Calcolare $(2\sqrt{3} - 2i)^3$

Lunedì 3 e mercoledì 5 dicembre

Equazioni differenziali ordinarie del primo a variabili separabili. Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine a coefficienti costanti.

Esercizi

$$y' = \sqrt{1+y} \sin t \quad y(0) = 1$$

$$y' \log y = \frac{\cos t}{y} \quad y(1) = 2$$

$$y' = y^2 t \quad y(0) = 0$$

$$y' = y^2 t \quad y(1) = 1$$

$$y' = (y + 1)^2 t \quad y(0) = 1$$

$$y' = y(2 - y) \quad y(0) = 1$$

$$yy' = t + ty^2 \quad y(0) = 1$$

$$y' = te^y \quad y(1) = 1$$

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$

$$y'' - 4y = 0 \quad \text{con } y(-1) = 0 \text{ e } y'(-1) = 1.$$

$$9y'' - 6y' + y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$

$$y'' + 6y' + 25y = 0 \quad \text{con } y(-1) = 0 \text{ e } y'(-1) = 1.$$

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad \text{con } y(1) = y_0 \text{ e } y'(1) = v_0.$$

$$y'' = y - y', \quad \text{con } y(0) = -1 \text{ e } y'(0) = 1.$$

Calendario ultime lezioni

- Tutor, lunedì 17 pomeriggio, ore 14,30
- Prof. Cinti mercoledì 19 e giovedì 20 negli orari usuali. A disposizione per svolgere esercizi su entrambe le parti.
- Ricevimento Morbidelli, venerdì 21 delle 9.30 alle 12 (ufficio numero 4020, secondo piano).

Regole d'esame

- Per gli esami è **obbligatorio** iscriversi sulla piattaforma almaesami.
- Alla prova scritta non si possono usare appunti o libri.
- La prova orale è facoltativa, ma a chi non sostiene la prova orale verrà verbalizzato il voto $x = \min\{25, y\}$, dove $y \leq 30$ è il voto della prova scritta.
- La prova orale va sostenuta **nello stesso appello della prova scritta**
- Alla prova orale si chiederà allo studente di rispondere alle domande in forma scritta. I teoremi/formule che sono stati dimostrati sono etichetati da un asterisco.

Indicazioni per la prova scritta

La prova scritta conterà di 6 esercizi, a risposta aperta oppure a scelta multipla. Degli esercizi a scelta multipla **non si dovrà scrivere alcuno svolgimento in bella copia**.

I primi quattro esercizi verteranno sui contenuti del primo modulo; gli ultimi due, sui contenuti del secondo modulo.

Esercizi modello per il primo modulo:

1. Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log(1-x^2)}{x - \sin x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{2x}}{xe^x - e^{x^2}}$$

2. Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x} + e^{x-x^2} - e^{3x}}{xe^{2x} + 2e^x \log x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(2x - \alpha|x|)}{\log(\pi+x)|x-x^2|} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Dire dove è definita e in che intervalli è crescente/decescente la funzione

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^{3/2}}.$$

4. (Barrare la risposta esatta senza scrivere lo svolgimento) L'uguaglianza

$$\int_0^1 xe^{bx} dx = \frac{e^b - 1}{b^2} + \frac{2}{b}$$

è corretta per:

- ☐ $b = 2$ ☐ $b = \log 2$ ☐ $b = 2 \log 2$
☐ $b = 0$ ☐ $b = 1$ ☐ Nessuna delle precedenti

5. Risolvere il problema di Cauchy

$$y'' + 2y' + 3y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

6. Dette $\operatorname{Re} z$ la parte reale del numero $z \in \mathbb{C}$, dire quelle delle seguenti affermazioni riguardanti il numero $z = (1 - i\sqrt{3})^7$ è corretta:

- ☐ $\operatorname{Re} z > |\operatorname{Im} z|$ ☐ $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ ☐ $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$
☐ $\operatorname{Re} z > |z|$ ☐ $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$ ☐ Nessuna delle precedenti

7. Risolvere il problema di Cauchy

$$y' = 1 + 4y^2, \quad y(1) = 0$$

e, detta $y(t)$ la soluzione di tale problema, calcolare

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{t^2 - 1} \quad \text{per ogni } b \in \mathbb{R}.$$

8. Dire quanto vale la derivata della funzione

$$F(x) = \int_{x^2}^3 \sqrt{1+|t|^{1/2}} dt$$

9. Calcolare la derivata della funzione

$$F(x) = \int_x^{x^3} \sqrt{1+t^2} dt$$

10. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{2x - \alpha x^2}}{e^{3x} + e^{\sqrt{x}} + 1} \quad \text{al variare di } \alpha \in \mathbb{R}$$

11. Scrivere il polinomio di Taylor di grado due per la funzione

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2},$$

nel punto $x_0 = -1$.

12. Stabilire in quali intervalli è crescente/decescente la funzione

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

13. Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos(x^2 - x) \cdot \log(1+x)}{x^{5/2} - b x^2} \quad \text{con } b \in \mathbb{R}.$$

14. Calcolare l'integrale

$$\int_a^b x(\sin x + \cos(x^2)) dx$$

15. Analizzare dominio e intervalli di crescita/decrscita della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x},$$

16. Calcolare i numeri complessi

$$(2+i) \left| \frac{3+i}{1-i} \right| \quad \text{e} \quad (3+i)^2 + \text{Im}(2-i^4), \quad \left| 1+3i - \sqrt{2}(1+1) \right| + i \text{Re}(2+i^5)$$

17. Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x^2 - x)}{(x+2) \log(x+1)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x\sqrt{1+x} - x^{3/2})$$

18. Stabilire in quali sottointervalli di $]1, +\infty[$ è crescente la funzione

$$F(x) = \int_2^x \frac{t-3}{\log t} dt$$

19. Calcolare

$$\int_2^3 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$$

20. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan x}{(x^5 - 2x^3 + 1)^{1/3}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(\cos x)}{x^2 - 3x^{9/4}}.$$

21. È data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = e^{-x^2}$ e sia $\text{Graf}(f)$ il suo grafico. La retta di equazione $y = \frac{3-2x}{e}$

☐ Interseca $\text{Graf}(f)$ in $(0, 1)$ ☐ È tangente a $\text{Graf}(f)$ in $(1, e)$ (1.1)

☐ Non interseca $\text{Graf}(f)$ ☐ Ha pendenza $\frac{-2x}{e}$ (1.2)

☐ È tangente a $\text{Graf}(f)$ in $(1, e^{-1})$ ☐ Nessuna delle precedenti (1.3)

Argomenti prova orale

- Funzioni iniettive suriettive, biunivoche.
- Funzioni monotone crescenti e decrescenti debolmente e strettamente.
- Def. di limite di successione. Teoremi del confronto (*) e della permanenza del segno (*).
- Definizione di limite di funzione.
- Disuguaglianza $\sin x < x < \tan(x)$ per $x \in]0, \pi/2[$ (*).
- Limiti destri/sinistri.
- Definizione di funzione continua (*).
- Definizione di punto di massimo/minimo locale e globale.
- Limite notevole $\frac{\sin x}{x}$ (*). Limiti notevoli $\frac{e^x-1}{x}$ e $\log(1+x)/x$.
- Definizione di rapporto incrementale e derivata.
- Calcolo con la definizione delle derivate delle funzioni affini, esponenziale, logaritmo, radice e seno (*).
- Legame tra continuità e derivabilità (*). Formula per la derivata del prodotto (*).
- Approssimazione di Taylor del primo ordine per funzioni derivabili (*).
- Formula per la derivata di funzioni composte (*).
- Teoremi di Fermat (*), Rolle (*) e Lagrange (*).
- Teorema sulla regola di de l'Hopital, (*) nel caso $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)/g(x) = 0/0$.
- Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (*) e delle funzioni crescenti/decrescenti debolmente su un intervallo (*).
- Formula per la derivata della funzione inversa (*). Esempio di arctan.
- Formula di Taylor del secondo ordine per funzioni con derivate seconde continue e resto in forma di Peano.
- Condizione sufficiente del secondo ordine per punti di massimo/minimo (*).
- Definizione di primitiva. Teor di Caratterizzazione delle primitive di una funzione f (*).
- Funzioni integrali. Teorema fondamentale del calcolo sulla derivata della funzione integrale.
- Formula di Torricelli (*).