Analisi Matematica T-2
Ingegneria Edile – Ravenna 2013/14

Maria Manfredini, Daniele Morbidelli

Informazioni pratiche:

- Libro di riferimento: Bramanti, Pagani, Salsa, MATEMATICA, Seconda edizione, Zanichelli 2004.
- Queste pagine contengono gli argomenti svolti da Daniele Morbidelli e sono reperibili alla url `http://www.dm.unibo.it/~morbidel/didattica.html`. Verranno aggiornate durante lo svolgimento del corso
- Materiale didattico Prof. Manfredini: `http://www.dm.unibo.it/~manfredi/didattica.html`
- I teoremi/proposizioni con l'asterisco ($*$) sono stati dimostrati.
- È stata creata una lista di distribuzione del corso dal nome seguente: `daniele.morbidelli.Analisi_T2_Ing_Edile_Ravenna` Iscrizione su `https://www.dsa.unibo.it/`

1. Argomenti svolti (Daniele Morbidelli). Lista provvisoria

1.1. Venerdí 28 febbraio 2014

- Lo spazio $\mathbb{R}^n$ con le operazioni di somma e prodotto con scalare
- Il prodotto scalare euclideo e le sue proprietà
- Vettori ortogonali
- Norma euclidea e sue proprietà. Normalizzato di un vettore. DIstanza euclidea.
- Formula per $\|x+y\|^2$. Il Teorema di Pitagora in $\mathbb{R}^n$.
- Proiezione di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ sulla linea ℓ_a generata da un vettore a e sue proprietà di ortogonalità. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la disuguaglianza triangolare.
- La palla euclidea $B(x,r)$ di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$. Successioni convergenti in $\mathbb{R}^n$.
- Punti interni a un insieme e insiemi aperti. Esempi.

Possibile materiale di riferimento per lo spazio $\mathbb{R}^n$, struttura euclidea e topologia elementare: `http://www.dm.unibo.it/~morbidel/analysis_13_11.pdf`, pagine 13-18.

1.2. Mercoledí 5 marzo

- Proprietà degli insiemi aperti risspetto a unioni e intersezioni.
- Definizione di insieme chiuso. Teorema: un insieme chiuso contiene il limite di una successione convergente di punti nel chiuso stesso.
- Definizione di frontiera di un insieme.
- Funzioni in più variabili. Analisi dei grafici di $f(x,y) = y^2$ e $f(x,y) = x^2 + y^2$.
- Immagine e controimmagine (preimmagine) di insiemi. Insiemi di livello. Analisi delle curve di livello delle funzioni del punto precedente.
- Funzioni continue. Definizione per successioni. Teorema di Weierstrass (senza dim). Somme, prodotti, composizioni di funzioni continue (discussione informale).

- Equivalenza tra la definizione di continuità per successioni ed $\varepsilon - \delta$.
- Controimmagini di intervalli aperti attraverso funzioni continue. Come riconoscere insiemi aperti/chiusi definiti da disuguaglianze.
- Definizione di derivata parziale per funzioni di due variabili. Esempi di calcolo. Definizione in n variabili. Gradiente.

Esercizi per casa

(1) Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato e sia $B \subset \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme qualsiasi. Di quale tra i seguenti insiemi possiamo dire che è limitato? $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c.

(2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \le 2 \\ 3 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Trovare $f^{-1}(]a, +\infty[)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Dire se è aperto o meno, al variare di a.

(3) Dire quale dei seguenti insiemi è aperto, chiuso, oppure né aperto né chiuso.

- $\varnothing$
- $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\ x \neq 0\}$;
- $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 0\}$;
- $]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$;
- $]0,1[\times\{1\} \subset \mathbb{R}^2$.
- $\{2\} \times [0,1]$;
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n - 2^{-n}, n + 2^{-n}[$. $\quad \bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Individuare gli insiemi $f^{-1}(]b, +\infty[)$, al variare di $b \in \mathbb{R}$.

(5) Calcolare le derivate parziali rispetto a tutte le variabili delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1(x_2 + e^{x_1}), \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 \\
&f(x_1, x_2) = \sqrt{1 + x_2}, \quad f(x_1, x_2) = \log(1 + x_1 + x_1 x_2), \quad f(x_1, x_2) = (e^{x_1} + 1)^2, \\
&f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)e^{-x_3}, \quad f(x_1, x_2) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2, \\
&f(x_1, x_2) = \|(x_1, x_2)\|, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + 1}, \\
&f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2, \quad f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|.
\end{aligned}$$

1.3. Venerdí 14 marzo 2014

- Richiamo sulla definizione di $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ con $a \in \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$.
- Definizione di funzione differenziabile in una, due o n variabili (per funzioni a valori scalari).
- Definizione di differenziale di una funzione in un punto.
- Funzioni di classe C^1 in un aperto Ω. Teorema sulla differenziabilità delle funzioni C^1 $(*)$.
- Derivate direzionali. Formula del gradiente per il calcolo delle derivate direzionali $(*)$.
- Direzioni di massima crescita (da terminare la prossima volta).

Esercizi per casa

1. Calcolare il differenziale delle seguenti funzioni nei punti indicati:
   (a) $f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$ in $(\pi, 1)$.
   (b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \tan(x_2 x_3^2)$ in $(1, \frac{\pi}{4}, 1)$
   (c) $f(x_1, x_2) = \arctan(x_1 x_2)$ in $(-1, 2)$.
   Dire anche per quali vettori $h \in \mathbb{R}^2$ risulta $df(-1,2)h = 0$.
   (d) $f(x_1, \dots, x_n) = f(x) = \exp(1 + \|x\|^2)$ in $x = e_1 + e_2 + \cdots + e_n \in \mathbb{R}^n$.

   - Calcolare le derivate direzionali $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ delle seguenti funzioni nei punti indicati.
     (a) $f(x,y,z) = x + y^z$ nel punto $a = (2,3,2)$ nella direzione $v = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
     (b) $f(x,y) = x^2 + 2xy$ nel punto $(-1,2)$ nella direzione $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, dove $\theta \in \mathbb{R}$ è assegnato.

1.4. Mercoledí 26 marzo

- Direzione di massima crescita per una funzione a valori scalari e corrispondente massimo valore assunto dalla derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ al variare di v tra i vettori unitari.
- Piano tangente al grafico di una funzione differenziabile di due variabili.
- Curve in $\mathbb{R}^n$ e loro velocità (vettore tangente). Formula per la derivata lungo una curva di una funzione a valori scalari ($*$).
- Ortogonalità del gradiente di una funzione scalare agli insiemi di livello da essa definiti.
- Derivate seconde. Teorema di Schwarz

Esercizi

1. Dire in quale direzione unitaria v sono massime le derivate direzionali $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ delle seguenti funzioni nei punti assegnati:
$$f(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \qquad a = (1,2) \text{ e } \quad a = (-1,1);$$
$$f(x_1, x_2) = \tan(x_1 x_2) \qquad a = \left(\frac{1}{4}, \pi\right);$$
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|, \qquad a = e_1 + e_2$$

2. Dato un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^2 + \langle b, x\rangle$ con $b \in \mathbb{R}^n$ vettore assegnato. Calcolare il gradiente di f nel generico punto $x \in \mathbb{R}^n$ e in $x = e_2 + e_3$.

3. Scrivere le equazioni del piano tangente ai grafici delle seguenti funzioni nei punti proposti:
$$f(x,y) = x^2 + e^{xy} \quad \text{in} \quad (1, 0, f(1,0)) \text{ e } \quad (-1, 2, f(-1,2));$$
$$f(x,y) = \sin(xy) \quad \text{in} \quad \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)\right);$$
$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad (1, -2, f(1,-2)).$$

4. Calcolare usando la formulq per la derivata di funzione composta (derivata lungo una curva) le derivate $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$
$$f(x,y) = x^2 + e^{xy} \qquad \gamma(t) = (\sqrt{t}, t) \qquad \text{in } t > 0 \text{ generico e } t = 1; \tag{1.1}$$
$$f(x) = \|x\|^2 \qquad \gamma(t) = t e_1 + t^2 e_2 \qquad \text{in } t \in \mathbb{R} \text{ generico e } t = -1; \tag{1.2}$$

5. Data $f(x,y) = \sqrt{1 + xy^2}$, verificare che le derivate miste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ coincidono.

1.5. Mercoledí 2 aprile

- Esercizi in classe.
- Teorema di Schwarz sulle derivate seconde
- Forma quadratica $q(h) = \langle Ah, h\rangle$ associata a una matrice A simmmtrica $n \times n$.

Esercizi assegnati

Date le matrici A sottoindicate, scrivere le forma quadratiche ad esse associate.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Viceversa, date le forma quadratiche seguenti, scrivere le matrici simmetriche da cui esse provengono:

$$q(h_1, h_2) = h_1^2 - h_2^2 + h_1 h_2 \qquad q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 - h_2^2 + 3h_1 h_3 + 2(h_2 + h_3)h_3$$
$$q(h_1, \dots, h_n) = \lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2 + \cdots + \lambda_n h_n^2 \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ numeri reali assegnati.}$$

1.6. Venerdí 11 aprile

- Formula di Taylor del secondo ordine per funzioni di piú variabili a valori scalari (dimostrazione di come si ottiene il polinomio in piú variabili conoscendo quello in una variabile).
- Definizione di punto di massimo/minimo locale. Teorema di Fermat ($*$).
- Definizione di forma quadratica definita positiva, negativa e indefinita.
- Criterio di classificazione delle forme quadratiche in due variabili.
- Teorema di classificazione dei punti critici attraverso lo studio della matrice Hessiana.

1.7. Mercoledí 16 aprile

Esercizi vari di riepilogo sul calcolo differenziale

1.8. Venerdí 16 maggio

Numeri complessi. Rappresentazione nel piano di Gauss, operazione di somma, prodotto. Complesso coniugato e modulo. Quoziente di numeri complessi. Rappresentazione trigonometrica. Interpretazione del prodotto in termini di modulo e argomento dei fattori. Equazioni di secondo grado. Tutta la discussione è stata fatta seguendo il libro di testo Bramanti, Pagani, Salsa.

1.9. Mercoledí 21 maggio

Introduzione al problema delle equazioni ordinarie. Equazioni del primo ordine lineari omogenee e non omogenee. Equazioni a variabili separabili. Esempio di non unicità e teorema di esistenza e unicità per $f(t, y)$ di classe C^1. Esempio do blow up (per l'equazione $y' = 1 + y^2$).

1.10. Venerdí 23 maggio

Equazioni del secondo ordine del tipo $ay'' + by' + cy = f(t)$. Studio di equazioni omogenee. Scrittura dell'integrale generale a seconda del valore di $b^2 - 4ac$. Teorema di risolubilità del problema di Cauchy con dati $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = v_0$.

Esempi: il pendolo e la sua approssimazione lineare $y'' + \omega^2 y = 0$ (oscillatore armonico). L'oscillatore armonico con attrito ($y'' + 2\varepsilon y' + \omega^2 y = 0$, con $0 < \varepsilon < \omega$).

Esercizi per casa. RIsolvere i problemi di Cauchy seguenti:

$$\begin{cases} e^t y' = ty \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = ty + e^{t^2/2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = ty^{3/2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1.11. Venerdí 30 maggio

Equazioni non omogenee del tipo

$$ay'' + by' + cy = p(t)$$

con $a \neq 0$ e $p(t)$ polinomio. Soluzione generale del tipo $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + z(t)$ con y_1, y_2 sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e z soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Ricerca di una soluzione particolare con il metodo di somiglianza. Discussione dei due casi:

1) $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Scelta di $z(t) = q_0 + q_1 t + \cdots$ =polinomio dello stesso grado di q.
2) $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$. Scelta di $z(t) = tq(t)$ con q polinomio dello stesso grado di p.
Esercizi di riepilogo

Esercizi per casa

Risolvere i problemi:

$$\begin{aligned}
& yy' = \sqrt{1+y^2} \qquad y(0) = \sqrt{3} \\
& y' = te^t y^2 \qquad y(0) = 1 \\
& 2y'' + y' = t \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \\
& y' - t - ty = 0 \qquad y(0) = 1 \\
& y'' - 6y' + 13y = 2 \quad \text{(scrivere l'integrale generale)} \\
& 2y'' - 3y' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \\
& y' = 2ty + t^3 \qquad y(0) = 0. \\
& y' = \frac{y}{t} + t \qquad y(1) = 2
\end{aligned}$$