Analisi Matematica T-2
Ingegneria Edile – Ravenna 2014/15

Maria Manfredini, Daniele Morbidelli

Informazioni pratiche:

- Libro di riferimento: Bramanti, Pagani, Salsa, Analisi MAtematica 2, Seconda edizione, Zanichelli 2004. `http://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/analisi-matematica-2`
- Queste pagine contengono gli argomenti svolti da Daniele Morbidelli e sono reperibili alla url `http://www.dm.unibo.it/~morbidel/didattica.html`. Verranno aggiornate durante lo svolgimento del corso
- Materiale didattico Prof. Manfredini: `http://www.dm.unibo.it/~manfredi/didattica.html`
- I teoremi/proposizioni con l'asterisco ($*$) sono stati dimostrati.

1. Argomenti svolti (Daniele Morbidelli). Lista provvisoria

1.1. Venerdí 27 febbraio 2015 (1)

- Lo spazio $\mathbb{R}^n$ con le operazioni di somma e prodotto con scalare
- Il prodotto scalare euclideo e le sue proprietà
- Vettori ortogonali
- Norma euclidea e sue proprietà. Normalizzato di un vettore. DIstanza euclidea.
- Formula per $\|x+y\|^2$. Il Teorema di Pitagora in $\mathbb{R}^n$.
- Le coordinate polari piane e la scrittura del prodotto scalare tra $(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$
- La palla euclidea (=intorno sferico=disco) $B(x,r) \equiv U(x,r)$ di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$.
- Punti interni a un insieme e insiemi aperti.

Esercizi

1. Individuare tutti i vettori ortogonali a $(1,-1,3,4)$ in $\mathbb{R}^4$.
2. Individuare tutti i vettori simultaneamente ortogonali a $u = (1,0,3)$ e a $v = (0,1,1)$.
3. Individuare tutti i vettori ortogonali al vettore $u = e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^n$ (qui $e_1, \dots, e_n$ indicano i versori coordinati in $\mathbb{R}^n$).
4. Calcolare la distanza tra $(1,2,3)$ e $(4,2,0)$.
5. Individuare tutti i punti interni dell'insieme $]0,1] \subset \mathbb{R}$. Tale insieme è aperto? RIcordare che in dimensione uno $U(x,r) =]x-r, x+r[$.

1.2. Mercoledí 4 marzo 2015 (5)

- Esempi di insiemi aperti.
- Proprietà di insiemi aperti e chiusi rispetto a unione e intersezione.
- Successioni in $\mathbb{R}^n$ e loro limiti.
- Limiti di successioni di punti di un chiuso (*).
- Funzioni di piú variabili a valori scalari. Grafico e analisi degli insiemi di livello per alcuni esempi di funzioni.
- Funzioni continue. Definizione per successioni e (ε, δ).

- Definizione di derivata parziale per funzioni di due variabili e primi esempi di calcolo.

1.3. Lunedí 9 marzo 2015

(9)

- Definizione ed esempi di calcolo di derivate parziali in due o piú variabili.
- Definizione di $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = L$.
- Confronto tra esistenza delle derivate parziali in un punto e continuità.
- La nozione di funzione differenziabile, in 2 e in n variabili.
- Definizione di differenziale di una funzione di n variabili.
- L'equazione del piano tangente al grafico di una funzione di due variabili.

Esercizi

- Calcolare le derivate parziali rispetto a tutte le variabili delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = xy, \quad f(x_1,x_2) = x_1(x_2 + e^{x_1}), \quad f(x_1,x_2) = x_1^2 x_2\\
&f(x_1,x_2) = \sqrt{1+x_2}, \quad f(x_1,x_2) = \log(1+x_1+x_1x_2), \quad f(x_1,x_2) = (e^{x_1}+1)^2,\\
&f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3, \quad f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2)e^{-x_3}, \quad f(x_1,x_2) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2,\\
&f(x_1,x_2) = \|(x_1,x_2)\|, \quad f(x_1,x_2) = \frac{x_1+x_2}{x_1^2+1},\\
&f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2, \quad f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|.\\
&f(x,y,z) = \arctan(1+x^2yz) \quad f(x,y) = \frac{e^{xy}}{1+e^{-xy}}
\end{aligned}$$

- Scrivere le equazioni del piano tangente ai grafici delle seguenti funzioni nei punti proposti:

$$\begin{aligned}
f(x,y) = x^2 + e^{xy} \quad &\text{in} \quad (1,0,f(1,0)) \text{ e } \quad (-1,2,f(-1,2));\\
f(x,y) = \sin(xy) \quad &\text{in} \quad \Big(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, f\Big(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\Big)\Big);\\
f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 \quad &\text{in} \quad (1,-2,f(1,-2)).
\end{aligned}$$

- Calcolare il differenziale delle seguenti funzioni nei punti indicati:
  1. $f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$ in $(\pi, 1)$.
  2. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \tan(x_2 x_3^2)$ in $(1, \frac{\pi}{4}, 1)$
  3. $f(x_1,x_2) = \arctan(x_1x_2)$ in $(-1,2)$.
     Dire anche per quali vettori $h \in \mathbb{R}^2$ risulta $df(-1,2)h = 0$.
  4. $f(x_1,\dots,x_n) = f(x) = \exp(1 + \|x\|^2)$ in $x = e_1 + e_2 + \cdots + e_n \in \mathbb{R}^n$.

1.4. Mercoledí 11 marzo

(13)

- Funzioni di classe C^1. Differenziabilità delle funzioni C^1 $(*)$.
- Derivate direzionali. Formula del gradiente (*). Direzione di massima crescita di una funzione.
- Curve di $\mathbb{R}^n$. Velocità. Derivata di una funzione scalare lungo una curva $(*)$.
- Insiemi di livello di una funzione e gradiente.

Esercizi per casa

1. Calcolare il differenziale delle seguenti funzioni nei punti indicati:

   (a) $f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$ in $(\pi, 1)$.
   (b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \tan(x_2 x_3^2)$ in $(1, \frac{\pi}{4}, 1)$

(c) $f(x_1, x_2) = \arctan(x_1 x_2)$ in $(-1, 2)$.
Dire anche per quali vettori $h \in \mathbb{R}^2$ risulta $df(-1,2)h = 0$.
(d) $f(x_1, \dots, x_n) = f(x) = \exp(1 + \|x\|^2)$ in $x = e_1 + e_2 + \dots + e_n \in \mathbb{R}^n$.

2. Calcolare le derivate direzionali $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ delle seguenti funzioni nei punti indicati.

   (a) $f(x, y, z) = x + y^z$ nel punto $a = (2, 3, 2)$ nella direzione $v = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
   (b) $f(x, y) = x^2 + 2xy$ nel punto $(-1, 2)$ nella direzione $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, dove $\theta \in \mathbb{R}$ è assegnato.

3. Dire in quale direzione unitaria v sono massime le derivate direzionali $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ delle seguenti funzioni nei punti assegnati:

$$f(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \qquad a = (1, 2) \text{ e } \quad a = (-1, 1);$$
$$f(x_1, x_2) = \tan(x_1 x_2) \qquad a = \Big(\frac{1}{4}, \pi\Big);$$
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|, \qquad a = e_1 + e_2$$

4. Dato un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^2 + \langle b, x \rangle$ con $b \in \mathbb{R}^n$ vettore assegnato. Calcolare il gradiente di f nel generico punto $x \in \mathbb{R}^n$ e in $x = e_2 + e_3$.

5. Scrivere le equazioni del piano tangente ai grafici delle seguenti funzioni nei punti proposti:

$$f(x, y) = x^2 + e^{xy} \quad \text{in} \quad (1, 0, f(1, 0)) \text{ e } \quad (-1, 2, f(-1, 2));$$
$$f(x, y) = \sin(xy) \quad \text{in} \quad \Big(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, f\Big(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\Big)\Big);$$
$$f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad (1, -2, f(1, -2)).$$

6. Calcolare usando la formulq per la derivata di funzione composta (derivata lungo una curva) le derivate $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$

$$f(x, y) = x^2 + e^{xy} \qquad \gamma(t) = (\sqrt{t}, t) \qquad \text{in } t > 0 \text{ generico e } t = 1;$$
$$f(x) = \|x\|^2 \qquad \gamma(t) = te_1 + t^2 e_2 \qquad \text{in } t \in \mathbb{R} \text{ generico e } t = -1;$$

1.5. Venerdí 13 marzo (19)

- Esercizi sul calcolo differenziale del primo ordine
- Derivate seconde. Teorema di Schwarz.
- Differenziale secondo. Formula di Taylor del secondo ordine.

Esercizi

Scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine per le funzioni seguenti nei punti indicati:

$$f(x, y) = x^3 y^2, \qquad (\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (\overline{x}, \overline{y}) = (1, 2).$$
$$f(x, y) = \tan(xy) \qquad (\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0)$$
$$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 - 2y}, \qquad (\overline{x}, \overline{y}) = (-1, 1)$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \sqrt{1 + x_1 x_3}, \qquad (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = (2, -1, 4).$$

Mercoledí 18 marzo. Tutor

1.6. Mercoledí 25 marzo

Forme quadratiche definite, indefinite e semidefinite. Criterio per la classificazione per forme quadratiche in due variabili. (23)

Condizioni necessarie (∗) e sufficienti (∗) del secondo ordine per punti di massimo e minimo.

1.7. Venerdí 27 marzo

Esercizi di riepilogo sul calcolo differenziale. (27)

Esercizi

Individuare e se possibile classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 - 4y^2).$$

Dire quale/quali tra i punti $P = (0, 1)$, $Q = (0, 0)$ e $R = (1, 0)$ è punto critico per la funzione

$$f(x, y) = 3x^2 - 6x - e^x y^2 + xy - y$$

e classificarlo/i.

1.8. Mercoledí 20 maggio

Introduzione al problema delle equazioni ordinarie. Equazioni del primo ordine lineari omogenee e non omogenee. Equazioni a variabili separabili. Esempio di non unicità. Esempio di blow up (per l'equazione $y' = 1 + y^2$). (31)

Esercizi

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} e^t y' = ty \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = ty + e^{t^2/2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = ty^{3/2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} &yy' = \sqrt{1 + y^2} \qquad y(0) = \sqrt{3} \\ &y' = te^t y^2 \qquad y(0) = 1 \\ &y' - t - ty = 0 \qquad y(0) = 1 \\ &y' = 2ty + t^3 \qquad y(0) = 0. \\ &y' = \frac{y}{t} + t \qquad y(1) = 2 \end{aligned}$$

1.9. 25 Maggio 2015

Equazioni del secondo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti $ay'' + by' + cy = 0$. Scrittura dell'integrale generale nel caso $b^2 - 4ac > 0$. Teorema di risolubilità del problema di Cauchy con dati $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = v_0$.

1.10. 27 Maggio 2015

Equazioni $ay'' + by' + cy = 0$ nel caso $b^2 - 4ac = 0$ e < 0. Scrittura dell'integrale generale e risolubilità del problema di Cauchy. Esempi: l'oscillatore armonico $y'' + \omega^2 y = 0$.

L'oscillatore armonico con attrito ($y'' + 2\varepsilon y' + \omega^2 y = 0$, con $0 < \varepsilon < \omega$ e $\varepsilon > \omega$).

Esercizi

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$2y'' - 3y' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

1.11. 29 maggio 2015

Studio di equazioni non omogenee del tipo $ay'' + by' + cy = f(t)$ con f polinomio. Forma dell'integrale generale. Ricerca della soluzione particolare nei casi in cui f è un polinomio.

Esercizi

Scrivere l'integrale generale delle equazioni

$$y'' - 2y' + y = t^2, \qquad y'' - y' - t = 1, \qquad y'' = te^t.$$