Analisi Matematica T-2
Ingegneria Edile – Ravenna 2015/16

Fausto Ferrari, Daniele Morbidelli

Aggiornato al 2 giugno 2016

Informazioni pratiche:

- Libro di riferimento: Bramanti, Pagani, Salsa, Analisi MAtematica 2 (Zanichelli 2009) `http://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/analisi-matematica-2`
- Queste pagine contengono gli argomenti svolti da Daniele Morbidelli e sono reperibili alla url `http://www.dm.unibo.it/~morbidel/didattica.html`. Verranno aggiornate durante lo svolgimento del corso
- I teoremi/proposizioni con l'asterisco (∗) sono stati dimostrati.

1. Argomenti svolti (Daniele Morbidelli). Lista provvisoria

1.1. Mercoledí 24 febbraio 2015

(1)

- Il prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$ e le sue proprietà
- Vettori ortogonali
- Norma euclidea e sue proprietà. Normalizzato di un vettore. DIstanza euclidea.
- Le coordinate polari piane e la scrittura del prodotto scalare tra $(r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1)$ e $(r_2 \cos\theta_2, r_2 \sin\theta_2)$.
- La palla euclidea (=intorno sferico=disco) $B(x,r)$ di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$.
- Definizione di insieme aperto.
- Funzioni $f : A \to B$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^q$. Dominio, codominio, ggrafico
- Funzioni a valori scalari e loro grafico. Esempi: $f(x,y) = y^2$, $f(x,y) = x^2 + y^2$

Esercizi

1. Calcolare $\langle (1,2,3), (0,-1,5) \rangle$
2. Indicato con $e_1, \dots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, calcolare il prodotto scalare $\langle e_j, e_k \rangle$ a seconda che sia $j = k$ o $j \neq k$.
3. Calcolare, in $\mathbb{R}^n$, $\|e_1 + 2e_3\|$.
4. Individuare tutti i vettori $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ che siano ortogonali a $(1,-1,3,4)$.
5. Individuare tutti i vettori $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonali a $u = (1,0,3)$ e a $v = (0,1,1)$.
6. Calcolare la distanza tra $(1,2,3)$ e $(4,2,0)$.
7. Aiutandosi con uno strmento di plot online (ad esempio `http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/graph3d/`) visulaizzare il grafico delle due funzioni viste in classe e delle funzioni $f(x,y) = 1 - 2x$ e $f(x,y) = 2 - x - 2y$. Facendo varie prove concoefficienti numerici si verifichi empiricamente che ogni funzione del tipo $f(x,y) = a + by + c$ ha come grafico un piano nello spazio.

1.2. 2 marzo 2016

- Insiemi di livello di funzioni a valori scalari. Esempi su alcuni polinomi di grado uno e due. (4)

- Funzioni continue. Definizione per successioni e definizione $(\epsilon - \delta)$. Equivalenza delle due definizioni $(*)$.
- Definizione di derivata parziale. Calcolo di derivate parziali di funzioni "regolari" per
- Gradiente di una funzione. Punti critici/stazionari.

Esercizi

- Calcolare le derivate parziali rispetto a tutte le variabili delle seguenti funzioni. Di quelle con $\overset{(*)}{=}$ individuare anche i punti critici.

$$f(x,y) = xy, \quad f(x_1,x_2) \overset{(*)}{=} x_1(x_2 + e^{x_1}), \quad f(x_1,x_2) = x_1^2 x_2$$
$$f(x_1,x_2) = \sqrt{1+x_2}, \quad f(x_1,x_2) \overset{(*)}{=} \log(1 + x_1 + x_1 x_2), \quad f(x_1,x_2) = (e^{x_1}+1)^2,$$
$$f(x_1,x_2,x_3) \overset{(*)}{=} x_1x_2x_3, \quad f(x_1,x_2,x_3) \overset{(*)}{=} (x_1+x_2)e^{-x_3}, \quad f(x_1,x_2) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2,$$
$$f(x_1,x_2) = \|(x_1,x_2)\|, \quad f(x_1,x_2) = \frac{x_1+x_2}{x_1^2+1},$$
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2, \quad f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \|x\|.$$
$$f(x,y,z) = \arctan(1 + x^2yz) \quad f(x,y) = \frac{e^{xy}}{1+e^{-xy}}$$

1.3. 9 marzo 2016

(7)

- Esempio di funzione con derivate parziali ma discontinua in un punto (*).
- Definizione di differenziabilità e di differenziale per funzioni di una, o piú variabili.
- Polinomio di Taylor di grado 1 per una funzione di piú variabili.
- Legame tra differenziabilità e continuità (*). Piano tangente al grafico di una funzione di

Esercizi

- Scrivere le equazioni del piano tangente ai grafici delle seguenti funzioni nei punti proposti:

$$f(x,y) = x^2 + e^{xy} \quad \text{in} \quad (1,0,f(1,0)) \text{ e } \quad (-1,2,f(-1,2));$$
$$f(x,y) = \sin(xy) \quad \text{in} \quad \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)\right);$$
$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad (1,-2,f(1,-2)).$$

- Calcolare il differenziale delle seguenti funzioni nei punti indicati:
  1. $f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$ in $(\pi, 1)$.
  2. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \tan(x_2 x_3^2)$ in $(1, \frac{\pi}{4}, 1)$
  3. $f(x_1,x_2) = \arctan(x_1x_2)$ in $(-1,2)$.
     Dire anche per quali vettori $h \in \mathbb{R}^2$ risulta $df(-1,2)h = 0$.
  4. $f(x_1,\dots,x_n) = f(x) = \exp(1 + \|x\|^2)$ in $x = e_1 + e_2 + \cdots + e_n \in \mathbb{R}^n$.
- Scrivere il polinomio di Taylor di grado 1 per $f(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_3}{x_1^2+x_2^2}$ nel punto iniziale $(1,2,-3)$

1.4. 16 marzo 2016

(10)

- Funzioni C^1. Teorema di differenziabilità delle funzioni C^1 $(*)$.
- Derivate direzionali. Definizione. Formula del gradiente per il calcolo delle derivate direzionali $(*)$.
- Direzione di massima crescita di una funzione di due variabili $(*)$ o piú variabili.

Esercizi

1. Calcolare le derivate direzionali $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ delle seguenti funzioni nei punti indicati.
   (a) $f(x,y,z) = x + y^z$ nel punto $a = (2,3,2)$ nella direzione $v = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
   (b) $f(x,y) = x^2 + 2xy$ nel punto $(-1,2)$ nella direzione $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, dove $\theta \in \mathbb{R}$ è assegnato.
2. Dire in quale direzione unitaria v sono massime le derivate direzionali $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ delle seguenti funzioni nei punti assegnati:

$$f(x_1,x_2) = x_1 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \qquad a = (1,2) \text{ e } \quad a = (-1,1);$$
$$f(x_1,x_2) = \tan(x_1 x_2) \qquad a = \Big(\frac{1}{4}, \pi\Big);$$
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|, \qquad a = e_1 + e_2$$

3. Dato un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^2 + \langle b, x\rangle$ con $b \in \mathbb{R}^n$ vettore assegnato. Calcolare il gradiente di f nel generico punto $x \in \mathbb{R}^n$ e in $x = e_2 + e_3$.
4. Scrivere le equazioni del piano tangente ai grafici delle seguenti funzioni nei punti proposti:

$$f(x,y) = x^2 + e^{xy} \quad \text{in} \quad (1,0,f(1,0)) \text{ e } \quad (-1,2,f(-1,2));$$
$$f(x,y) = \sin(xy) \quad \text{in} \quad \Big(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, f\Big(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\Big)\Big);$$
$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad (1,-2,f(1,-2)).$$

1.5. 23 marzo 2016

- Esercizi. Curve (cammini) di $\mathbb{R}^n$. Velocità di una curva.
- Derivata di una funzione scalare lungo una curva ($*$). Accelerazione di una curva.

Esercizi

Calcolare la velocità (13)

1. Calcolare usando la formula per la derivata di funzione composta (derivata lungo una curva) le derivate $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$

$$f(x,y) = x^2 + e^{xy} \qquad \gamma(t) = (\sqrt{t}, t) \qquad \text{in } t > 0 \text{ generico e } t = 1;$$
$$f(x) = \|x\|^2 \qquad \gamma(t) = te_1 + t^2 e_2 \qquad \text{in } t \in \mathbb{R} \text{ generico e } t = -1;$$

2. Data la funzione di una variabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considerare la curva $\gamma(t) = (t, f(t))$. Calcolare la norma della velocità di γ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

   Scgeliendo $f(t) = (t-1)^3$, stabilire se esistono il massimo e il minimo di $\|\gamma'(t)\|$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

3. Data la curva $\gamma(t) = (t^2, t^2 - t)$, stabilire (se ci sono) il/i valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali la velocità $\gamma'(t)$ è perpendicolare al vettore $(-5, 6)$.

4. Data una funzione di una variabile a valori scalari $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, calcolare la derivata

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1 x_2 x_3^2) \quad \text{per } j = 1,2,3.$$

5. Data una funzione C^1 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, calcolare le derivate seguenti

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x^2, xy, e^{-y}), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x^2, xy, e^{-y})$$

1.6. Mercoledí 6 aprile 2016

- Esercizi (16)
- Ortogonalità tra gradiente e curve di livello (2 variabili)
- Derivate seconde, Teorema di Schwarz, matrice Hessiana.
- Matrici simmetriche quadrate e forme quadratiche associate.
- Formula di Taylor del secondo ordine, con resto di Peano (con gli "o piccoli"). Polinomio di Taylor.

Esercizi

Scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine per le funzioni seguenti nei punti indicati:

$$f(x,y) = x^3y^2, \qquad (\overline{x}, \overline{y}) = (0,0) \quad \text{e} \quad (\overline{x}, \overline{y}) = (1,2).$$
$$f(x,y) = \tan(xy) \qquad (\overline{x}, \overline{y}) = (0,0)$$
$$f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 - 2y}, \qquad (\overline{x}, \overline{y}) = (-1,1)$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2\sqrt{1 + x_1x_3}, \qquad (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = (2, -1, 4).$$

Scrivere la matrice quadrata simmetrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $q_A(h_1, h_2, h_3) = h_1h_2 - h_3^2)$.
Scrivere la matrice quadrata A associata alla generica forma quadratica diagonale in $\mathbb{R}^n$

$$q(h) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j^2$$

1.7. Mercoledí 13 aprile 2016

(19)

- Formula di Taylor del secondo ordine con resto di Peano (con gli "o piccoli"). Dimostrazione di come ottenere il polinomio in piú variabili utilizzando quello in una $(*)$. Esercizi
- Forme quadratiche definite positive, negative, indefinite e semidefinite (positive e negative) Classificazione delle forme quadratiche in due variabili, positive $(*)$, negative e indefinite. Esempi ed esercizi

1.8. Mercoledí 20 aprile 2016

(22)

- Punti di massimo/minimo locale e globale (definizione). Teorema di Fermat $(*)$. Nozione di punto critico/stazionario.
- COndizioni del secondo ordine per massimi e minimi. Necessarie $(*)$ e sufficienti $(*)$.
- Esercizi

1.9. Mercoledí 27 aprile 2016

(25)

- Esercizi vari sull'individuazione di punti critici in piú variabili e sulla loro classificazione.
- Riepilogo della nozione di funzione convessa (derivabile) in una variabile.

Esercizi

Sul libro di testo: p. 177,
- Es. 46, funzione f_3
- Es. 46, funzione f_5 (trovare tutti i punti critici e classificare solo $(0,0)$)
- Es. 47
- Es. 48 (solo la prima funzione)

1.10. Mercoledí 4 marzo 2016

Segmenti e insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$. Definizione di funzione convessa differenziabile. Teorema sui punti critici di funzioni convesse $(*)$. Caratterizzazione del secondo ordine della convessità. Esempi. Studio della convessità di

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}, \quad f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad f(x,y) = x^2 - y$$

Eserzizio: verifica che la funzione

$$f(x,y,z) = 1 + x^2 + 2y^2e^{-x} + z^2 + xy + \frac{1}{3}yz$$

è convessa in un opportuno intorno dell'orogine. Studiare dove è convessa la funzione

$$f(x,y) = x^2e^y + x^2$$

1.11. Mercoledí 11 marzo 2016

- Introduzione ai numeri complessi: rappresentazione nel piano di Gauss, somma, prodotto, modulo complesso coniugato.
- Risoluzione di equazioni di secondo grado a discriminante negativo.
- Forma trigonometrica. Modulo e argomento

Esercizi

- Risolvere le equazioni di secondo grado

$$z^2 + z + 4 = 0, \quad 4z^2 - 4z + 9 = 0, \quad z^2 - z + \frac{5}{4}.$$

- Scrivere modulo e argomento dei numeri

$$-1 + i, \quad i - 2i^3 + 1, \quad 1 + i\sqrt{3},$$

- Scrivere in forma cartesiana i numeri

$$3\Big(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\Big) \qquad 2(cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6))$$

- Si analizzi il segno della matrice Hessiana della funzione $f(x,y) = x^2 + 2xe^y$. In quale regione di piano la funzione f è convessa?

1.12. 18 maggio 2016

- Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica. Formula di De Moivre. Calcolo delle radici n-esime di un numero complesso.
- Introduzione al problema delle equazioni differenziali ordinarie. Equazioni a variabili separabili.

Esercizi

- Calcolare tutti i numeri complessi z che risolvono le seguenti equazioni

$$z^3 = 1, \qquad (z+1)^2 = 2i, \qquad (z-i)^6 = -1,$$

- Trovare le soluzioni di $(z-i)^2 = i$ e dire quale tra le soluzioni ha modulo piú piccolo.
- Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi z e w

$$z = |1+2i|^2 - (1+i)^2 \quad \text{e} \quad w = \frac{i}{1+i}.$$

- Scrivere in forma trigonometrica i numeri

$$z = \frac{1}{2} + i - \frac{i^2}{2} + 2i^3 \quad \text{e} \quad z = (1+i)^3.$$

- Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^2y - ye^{y^2}.$$

1.13. 30 maggio 2016

- Risoluzione di equazioni differenziabili del primo ordine a variabili separabili ($y' = a(t)b(y)$).
- Risoluzione di equazioni del primo ordine lineari $y' = a(t)y + f(t)$.

1.14. 1 giugno 1016

Studio delle equazioni del secondo ordine $ay'' + by' + cy = 0$.

Esercizi

- Risolvere

$$\begin{aligned} &y'' + 2y' = 0, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 0 \\ &y' = te^{-y} + e^{-y} \qquad \text{con} \quad y(0) = 0 \end{aligned}$$

- Stabilire se i punti $(0,0)$, $(1,0)$ sono critici per $f(x,y) = x^3 - 3x - y^2 + xy - y$ e in tal caso stabilire se sono punti di massimo, di minimo o punti sella.
- Scrivere il polinomio di Taylor di grado due e punto iniziale $(-2,1)$ della funzione $f(x,y) = \exp(xy^2)$
- Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} e^t y' = ty \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = ty + e^{t^2/2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = ty^{3/2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} &yy' = \sqrt{1+y^2} \qquad y(0) = \sqrt{3} \\ &y' = te^t y^2 \qquad y(0) = 1 \\ &y' - t - ty = 0 \qquad y(0) = 1 \\ &y' = 2ty + t^3 \qquad y(0) = 0. \\ &y' = \frac{y}{t} + t \qquad y(1) = 2 \end{aligned}$$