Analisi Matematica T-2
Ingegneria Edile – Ravenna 2017/18

Daniele Morbidelli, Maria Carla Tesi

Informazioni pratiche:

- Libro di riferimento: Bramanti, Pagani, Salsa, Analisi MAtematica 2, Seconda edizione, Zanichelli 2004. `http://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/analisi-matematica-2`
- Queste pagine contengono gli argomenti svolti da Daniele Morbidelli e sono reperibili alla url `http://www.dm.unibo.it/~morbidel/didattica.html`. Verranno aggiornate durante lo svolgimento del corso
- Materiale didattico Prof. Manfredini: `http://www.dm.unibo.it/~manfredi/didattica.html`
- I teoremi/proposizioni con l'asterisco ($*$) sono stati dimostrati.

1. Argomenti svolti (Daniele Morbidelli). Lista provvisoria

1.1. Venerdí 9 marzo 2017

(1)

Nozione di serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Definizione di serie convergente, divergente e oscillante. Esempio: la serie di Mengoli $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Condizione necessaria di convergenza ($*$) e sua non sufficienza attraverso l'esempio della serie armonica divergente ($*$). Serie geometrica. Calcolo esatto della somma e dell'intervallo di convergenza ($*$). Criterio del confronto tra serie a termini non negativi $\sum a_n$ e $\sum b_n$ ($*$).

Esercizi

Calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n, \sum_{n=3^\infty} \frac{5}{3^{n+1}}$$

Dire per quali valori dei parametri x e b sono convergenti le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + x^2\right)^n \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \sum_{n=1}^{\infty} (2 \sin b)^n \quad b \in [0, \pi]$$

e calcolarne la somma.

Studiare usando il criterio del confronto, la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^{2/3}}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{1+n^{3/2}}}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Suggerimento (richiede un minimo di sforzo): trovare il modo di verificare che $\frac{n}{2^n} \leq (\frac{3}{4})^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e usare il criterio del confronto.

Riflettendo sulla definizione di serie convergente, verificare che se due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sono convergwnti, allora, detto $c_n = a_n + b_n$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge e la sua somma è la somma delle somme delle due prime serie.

Calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n}.$$

1.2. Venerdí 16 marzo 2018

Criterio dei confronto. Convergenza o meno della serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Esercizi. Criterio del rapporto per serie a termini non negativi $(*)$. Seier a termini di segno varibile e criterio di Leibnitz. Convergenza assoluta di una serie. Relazione tra convergenza assoluta e semplice $(*)$. Insiemi semplici nel piano.

Esercizi

Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \big(\log(1+\alpha)\big)^n, \quad \alpha > -1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^{3/2}}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n - 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nx+1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (x^2 - x)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b + n^{1-b}}$$

Studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice delle serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1/n) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{ne^n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b(b+1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^2 + n \log n}{1 + n^2 \log n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n} + e^{-\alpha n}}{n^2} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

1.3. Venerdí 23 marzo

Esercizi di riepilogo sulle serie. Integrali di funzioni di due variabili du domini y-semplici e x-semplici. Definizione di baricentro di un insieme piano.

Esercizi

1. (Approfondimento di una domanda fatta in classe.) Si considerino le serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \Big(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n \log n}\Big)$$

   e si ponga $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n \log n}$. È ben noto che per il criterio di Leibnitz la prima serie è convergente. Verificare che
   - Le successioni a_n e b_n sono asintotiche $a_n \sim b_n$
   - nonostante il punto precedente, risulta $\sum_n (-1)^n \Big(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n \log n}\Big) = +\infty$. [1]

[1] Usare il seguente criterio: se $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ è decrescente, allora la serie $\sum n f(n)$ converge se e solo se converge l'integrale $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

- Stabilire se è vero o no che la successione (b_n) è monotona.

2. Dato $A = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2\pi \quad \sin y \leq x \leq 2\}$, calcolare l'area di A e l'integrale
$$\int_A (x+y)dxdy$$
3. Dato $A = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1 \text{ e } y^3 \leq x \leq y\}$, calcolare
$$\int_A (x+xy)dxdy.$$
4. Calcolare
$$\int_{[0,1]\times[0,\pi/2]} y\sin(xy)dxdy$$
5. Calcolare il baricentro del triangolo del piano individuato dai tre punti $(0,0)$, $(p,0)$ e $(0,q)$ con $p,q>0$.
6. Calcolare il baricentro dell'insieme
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1 \quad \text{e} \quad y > 1-x\}.$$

1.4. Venerdí 6 aprile 2018

Definizione di cambio di variabile $(u,v) \mapsto T(u,v) = (g(u,v), h(u,v))$ nel piano. Jacobiano, formula del cambio di variabile per gli integrali doppi. Le coordinate polarii piane. Esercizi.

Esercizi

Calcolare gli inegrali seguenti
$$\int_{\substack{x^2+y^2<1 \\ y>x/\sqrt{3}}} |x|dxdy \qquad \int_{(x-1)^2+y^2<4} ydxdy$$
(per il secondo usare un cambio di variabile in coordinate polari opportunamante modificato)
$$\int_{\frac{x^2}{4}+y^2<1} \frac{x^2}{x^2+4y^2}dxdy \qquad \int_{|x|<y<1} y^2e^{xy}dxdy.$$
$$\int_{1<\|(x,y)\|<R} e^{-\|(x,y)\|}dxdy$$
e andando al limite, l'integrale generalizzato
$$\int_{\|(x,y)\|>1} e^{-\|(x,y)\|}dxdy.$$

1.5. Venerdí 13 aprile 2018

Esercizi di riepilogo sugli integrali doppi. Integrali tripli "per fili" su insiemi del tipo
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A \subset \mathbb{R}^2 \quad g_1(x,y) < z < g_2(x,y)\},$$
con g_1 e g_2 funzioni definite su A.

Esercizi

- Calcolare il volume dell'intersezione D del cilindro $x^2+y^2<1$ con i due semispazi $z>0$ e $x+y-z>-5$. Calcolare poi sul medesimo insieme l'integrale della funzione $f(x,y,z)=x+y$.
- Calcolare
$$\mathrm{Vol}(D), \quad \text{con } D=\{(x,y,z): 0<x<1,\ 0<z<1-x \quad \text{e } |y|<1+x^2+z^2\}.$$
- Data la semisfera superiore $D=\{(x,y,z): z>0,\ x^2+y^2+z^2<R^2\}$, calcolare
$$\int_D x^2 z dxdydz.$$
- Dato l'insieme nel piano $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2<y<1+x\}$, calcolare la misura di A, $\int_A dxdy$ e il baricentro di A. L'insieme d'integrazione nella x (variabile dell'integrale "esterno" si deve capire dalla forma delle funzioni),
- Seguendo lo svolgimento dell'esercizio precedente, si consideri l'insieme
$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<z<1-2y\},$$
se ne calcoli la misura e il baricentro geometrico, secondo la formula
$$\mathrm{Bar}(D)=\Big(\frac{1}{\mathrm{Vol}\, D}\int_D xdxdydz, \frac{1}{\mathrm{Vol}\, D}\int_D ydxdydz, \frac{1}{\mathrm{Vol}\, D}\int_D zdxdydz\Big).$$
Attenzione: l'insieme A non è specificato, è possibile individuarlo usando g_1 e g_2

1.6. 20 aprile 2018

Esercizi ulteriori sull'integeazione "per fili". Presentazione dei solidi di rotazione $\{(x,y,z): z\in[a,b]\ \|(x,y)\|<h(z)\}$. Formula di riduzione "per strati" $\int dxdydz=\int dz\int dxdy$.

Esercizi

- Dato l'insieme $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2<y<1\}$ e detto $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in A \quad \mathrm{e} x^2<z<x^2+y\}$, calcolare
$$\int_D (x+yz)dxdydz.$$
- Considerare il solido di rotazione $D=\{(x,y,z): 0<z<1,\ \|(x,y)\|<\sqrt{z}\}$ e farne una figura. Calcolarne poi il volume e il baricentro utilizzando la formula di integrazione per strati.
- Dato il solido di rotazione $\{(x,y,z): 0<z<1, \quad \|(x,y\|<1+z\}$ se ne tracci una figura e si calcoli il suo volume e $\int_D y^2 dxdydz$.
- Si consideri l'insieme $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : |x|<\sin z, \quad |y|<\sin z\}$. Indivuduare l'insieme D_z definito in classe.[2] Calcolare poi il volume dell'intersezione $D\cap H$ dove H è la scriscia $=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<z<\pi\}$.

[2] $D_z := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y,z)\in D\}$.

1.7. Venerdí 27 aprile

Utilizzo della formula di ntegrazione "per strati"

$$\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int dz \int_{D_z} f(x,y,z)dxdy.$$

Cambi di variabile $(u,v,w) \mapsto T(u,v,w) = (f(u,v,w), g(u,v,w), h(u,v,w))$ in $\mathbb{R}^3$ Coordinate cilindriche e coordinate polari sferiche.

Esercizi

- Calcolare l'integrale

$$\int_D (y^2+z)dxdydz \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| < 1, \quad \|(x,y)\| < 1 + 2|z| + z\}$$

$$\int_D dxdydz \qquad D = \left\{(x,y,z) : 0 < z < R \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < z^2\right\}$$

- Introdotto il cambio di variabile in coordinate polari $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$, descrvere in tali coordinate i coni $D_1 = \{(x,y,z) : z > 0\}$, $D_2 = \{(x,y,z) : z > \|(x,y)\|\}$, l'ottante $D_3 = \{(x,y,z) : x > 0 \quad y > 0\}$, la calotta sferica $\{(x,y,z) : z > b\sqrt{x^2+y^2} \quad x^2+y^2+z^2 < 2\}$ con $b > 0$.

1.8. Venerdí 4 maggio

Coordinate sfweriche in $\mathbb{R}^3$. Esercizi vari.

Esercizi

- Calcolare il baricantro della calotta sferica descritta in coordinate sferiche da $\{(r,\theta,\varphi) : 0 < r < R,\ 0 < \varphi \leq \Phi\}$, dove $\overline{\Phi}$ è una latitudine assegnata.

- Descrivere in coordinate sferiche l'insieme $D = \{x,y,z \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x\}$. Calcolare poi il bafricentro dell'intersezione della sfera di raggio R con l'insieme D.

- Calcolare la velocità $r'(t)$, l'accelerazione $r''(t)$ e la velocità scalare $\|r'(t)\|$ dei seguenti cammini.

$$r(t) = (t, t^2+t), \quad r(t) = (t, e^{2t}), \quad r(t) = (\cos t \sin t, 2t), \qquad r(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2), 2t^2).$$

  Dire per quali valori di t la velocità scalare è minima

1.9. Venerdí 11 maggio

Curve (cammini) parametrizzate in $\mathbb{R}^n$. Velocità, accelerazione. Somma di curve parametrizzate. Lunghezza di una curva C^1 a tratti. Riparametrizzazione di una curva. Riparametrizzazioni equivalenti e opposte. Esempi. Lunghezza di un cammino parametrizzato. Invarianza della lunghezza di un cammino a fronte di una riparametrizzazione ($*$).

Esercizi

- Scrivere esplicitamente almeno una (possibilmente due) riparametrizzazioni equivalenti e due opposte della curva $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t, \sin(t))$. Confrontare le velocità e le accelerazioni in qualche punto a scelta.

- Dato il cammino $r(t) = (t, f(t))$ che percorre il grafico di una funzione f nell'intervallo $[0,1]$, calcolarne la velocità e l'accelerazione in ogni punto.
- Dinostrare che se una curva piana $t \mapsto r(t)$ percorre una circonferenza $\|r(t)\| = b$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ allora $r(t)$ e $r'(t)$ sono vettori perpendicolari in ogni punto. [Suggerimento: derivare l'identità $\|r(t)\|^2 = b^2$ rispetto a t]
  Seguendo lo stesso argomento dell'esercizio sopra, verificare che se una curva $r(t)$ ha velocità scalare costante, allora l'accelerazione $r''(t)$ è perpendicolare alla velocità in ogni punto.
- Calcolare la lunghezza ℓ della curva $r : [-b, b] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t, |t|^{3/2})$. Dire per quale valore di b tale lunghezza vale 5.
- Calcolare la lunghezza della spitale $r(t) = (e^{-t}\cos(bt), , e^{-t}\sin(bt))$ con $0 \le t \le T$ dove $b, T > 0$ sono parametri assegnati.

1.10. Venerdí 18 maggio

Svolgimento degli esercizi assegnati per casa.

Interali curvilinei di prima specie $\int_r f d\ell$ con f funzione scalare. Invarianza rispetto a riparametrizzazioni. Comportamento di tali integrali rispetto alla unione (somma) di curve. Baricentro geometrico di una curva.

Campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$. Definizione di integrale del lavoro di un campo lungo una curva orientata (integrale curvilineo di seconda specie).

Esercizi per casa

- Data la curva orientata $r(t) = (t, 2t)$ per $t \in [0,1]$ e date la funzione scalare f e il campo vettoriale F, definiti come segue
$$f(x,y) = x + y^2 \qquad F(x,y) = (x, y^2),$$
  calcolare usando le definizioni i due integrali curvilinei
$$\int_r f d\ell \qquad \text{e} \qquad \int_r F \cdot d\vec{r}$$
  Si provi a calcolare gli stessi integrali sulla curva con parametrizzazione opposta $\rho(t) = (1-t, 2(1-t))$ per $t \in [0,1]$ e si confrontino i risultati.
- Dato il campo $F(x,y,z) = (y, x, x^2)$, calcolare $\int F \cdot d\vec{r}$ sul segmento orientato parametrizzato a velocità costante che unisce i punti $(0,1,0)$ e $(1,2,-1)$.
- Sul cammino $r : [1,2] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t, e^t)$, calcolare gli integrali
$$\int_r (x^2, 2y) \cdot d\vec{r} \qquad \text{e} \qquad \int_r \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} d\ell.$$

1.11. Venerdí 25 maggio

Integrali curvilinei di seconda specie. Comportamento rispetto a riparametrizzazioni equivalenti od opposte (∗). Definizione di potenziale di un campo e di campo conservativo. Indipendenza del lavoro di un campo conservativo dalla traiettoria.

Esercizi

- Sulla falsariga dell'esercizio svolto in classe, sapendo che il campo $F(x,y) = (3x^2 + y^2, 2xy)$ è conservativo, trovarne un potenziale nei tre modi visti in classe: dapprima integrando lungo un opportuno percorso spezzato tra l'origine e (x,y), poi lungo il segmento rettilineo e poi cercando delle "primitive parziali" delle componenti.

- Stesso esercizio per $F(x, y) = (e^{y^2}, 2xye^{y^2})$.
- Sapendo che il campo in $\mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz + z^2, xy + 2zy)$ è esatto si calcoli un potenziale (ad esempio integrando sul segmento rettilineo che congiunge $(0, 0, 0)$ con (x, y, z), oppure provando con il metodo delle "primitive parziali" visto in classe.
  Ripassata la formula per il rotore di un campo vettoriale, si calcoli rot F (se non avete visto cos'è il rotore, lo faremo martedí).
- Dato il campo coulombiano/newtoniano
$$F(x, y, z) = b\|(x, y, z)\|^{-3}(x, y, z)$$
  scritto in classe, ricordando la forma del potenziale di F scritta in classe, calcolare l'integrale su un cammino che parte da $(0, 1, 0)$ e termina in $(-1, 2, 3)$. Verificare che è irrotazionale cioè che ha rotore nullo.

1.12. Martedí 29 maggio.

Definizione di campo irrotazionale in $\mathbb{R}^n$. Esempio di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Teorema sull'irrotazionalità dei campi conservativi $(*)$. Esempio di campo irrotazionale ma non conservativo. Idea informale di insieme aperto semplicemente connesso. Cenno al teorema sulla conservatività dei campi irrotazionali su domini semplicemente connessi.

Esercizi

1. (Svolto in dettaglio in classe con chi c'era) Dato il campo in $\mathbb{R}^2$
$$F(x, y) = \Big(\frac{2xy}{(1 + x^2)^2}, -\frac{1}{1 + x^2}\Big)$$
   vedere che è irrotazionale e trovzrne una primitiva.
2. (Svolto in dettaglio in classe con chi c'era) Dire per quali valori di b è irrotazionale il campo in $\mathbb{R}^3$
$$F(x, y, z)) = (e^{yz}, 1 + xze^{yz}, bxye^{yz})$$
   e, constatato che è conservativo, trovarne un potenziale.
3. Mostrare che il campo in $\mathbb{R}^2$ definito da $F(x, y) = (1 + \sin y, x \cos y)$ è irrotazionale. Trovarne un potenziale.

Esercizi di riepilogo

(i) Studiare la convergenza delle serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+3)^n}$$
(ii) Studiare convergenza semplice e assoluta di
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log(1+n^2)}{2^n + n}$$
(iii) Studiare convergenza di
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{10b^2}{b^2-1}\Big)^n$$
al variare di $b \in \mathbb{R}$ e calcolarne la somma.

(iv) Dire se convergono le serie seguenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{1+n^4}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n},$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(v) Calolare il volume e il baricentro del solido di rotazione

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3\prime} : 1 < z < 2, \quad x^2+y^2 < z\}$$

(vi) Dato il solido di rotaznione

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < z < 1, \quad \|(x,y)\| < 1+|z|\},$$

calcolarne il volume e il baricentro.

(vii) Calcolare l'integrale $\int_A (xy+z)dxdydz$, con

$$A = \{(x,y,z) : |x| < 1, \ |y| < 1 \quad \text{e} \quad 0 < z < 5-y\}.$$

(viii) Calcolare

$$\int_r xe^y d\ell \quad \text{e} \quad \int_r (xe^y, 1) \cdot d\vec{r},$$

dove r è una parametrizzazione del segmento rettilineo che unisce il punto (iniziale) $(-1,1)$ con $(2,3)$.

(ix) Calcolare l'integrale

$$\int (x^2+1, y+2) \cdot d\vec{r}$$

luungo il cammino parametrizzato $r : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t, 1-t^2$.

(x) Dato $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \quad \text{e} \quad x^{1/2} < y < 2-x\}$, calcolare

$$\int_A \sqrt{xy}\ \mathrm{d}xdy$$

(xi) Dato $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 < 4 \quad \text{e} \quad y > |x|\}$, calcolare

$$\int_A (x+y)dxdy$$

Stesso esercizio per l'insieme $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 < 4 \quad \text{e} \quad y > x/\sqrt{3}\}$

(xii) Dato l'insieme

$$A = \{(x,y) : 0 < x < 1; \text{ e } \ 0 < y < 2-x\},$$

calcolare

$$\int_A \sqrt{2x+y}\, dxdy.$$

Ricevimento: Martedí 5 pomeriggio, ore 13.30 circa.

Lista delle domande da esame orale

- Definizione di serie convergente, divergente e oscillante.
- Condizione necessaria di convergenza ($*$) e sua non sufficienza attraverso l'esempio della serie armonica divergente ($*$).
- Serie geometrica. Calcolo esatto della somma e dell'intervallo di convergenza ($*$).
- Criterio del confronto tra serie a termini non negativi $\sum a_n$ e $\sum b_n$ ($*$).
- Criterio del rapporto ($*$)
- Criterio di Leibnitz
- Convergenza assoluta e sua relazione con la convergenza semplice ($*$).
- Definizione di insieme semplice e formula di riduzione per integrali in 2 variabili.
- Definizione di cambio di variabile nel piano. Formula del cambio di variabile.
- Formula di riduzione degli integrali tripli "per fili" e "per strati".
- Curve nello spazio $\mathbb{R}^n$. Velocità. Riparametrizzazioni di curve (equivalenti e opposte).
- Lunghezza di una curva e invarianza della formula per la lunghezza a fronte di riparametrizzazioni ($*$). Integrale $\int_r f d\ell$ di una funzione scalare f lungo un cammino r.
- Integrale curvilineo di seconda specie (lavoro) $\int_r F \cdot d\vec{r}$ di un campo F lungo un cammino parametrizzato r. Suo comportamento rispetto a riparametrizzazioni equivalenti e opposte ($*$).
- Potenziale di un campo e definizione di campo conservativo. Indipendenza dal percorso del lavoro di un campo conservativo dalla traiettoria. Campi irrotazionali. Relazione tra campi irrotazionali e conservativi (cenni).