1. Discutere la convergenza delle serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\alpha n}{1+n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta n}$$
al variare dei parametri $\alpha \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

2. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$
su $[0, +\infty[$ e su $[0, M]$ con $M \in \mathbb{R}$.

3. Calcolare il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{x+x^2} \mathbb{1}_{[n,n^2]}(x)dx.$$

4. È dato l'insisme
$$A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x^2 < y < \sqrt{x}\}.$$
Calcolare la misura di A.
Per quali $c \in \mathbb{R}$ la misura $d\nu(x,y) = cdxdy$ è una misura di probabilità sugli insiemi Lebesgue misurabili contenuti in A? Calcolare infine
$$\int_A x d\nu(x,y).$$

5. Calcolare la misura dell'unione di rettangoli
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}]n, n+1[\times \left] -\frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{2^n} \right[.$$

ANALISI MATEMATICA LMSSFA – RIMINI 1 LUGLIO 2014

1. È dato per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $A_n = [n, n+1] \times [0, 2^{-n}]$. Calcolare la misura delle unioni
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{e} \qquad B_p = \bigcup_{n=1}^{p} A_n$$
per ogni $p \in \mathbb{N}$.

2. Calcolare la misura dell'insieme
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 \quad \text{ed} \quad y < x\}.$$

3. Data la successione di funzioni semplici $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$,
$$f_n(x) := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) - 2 \cdot \mathbb{1}_{[1,1+\frac{1}{n}]}(x),$$
discuterne convergenza puntuale, uniforme in media L^1 e in misura sull'intervallo $[0, 2]$.

4. Discutere la convergenza delle serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n) + e^{-n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^b},$$
al variare di $b \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare la misura dell'insieme $\bigcup_{n=3}^{\infty} A_n$, dove

$$A_n = [n, n+1] \times [0, 2^{-n}]$$

2. Studiare la convergenza puntuale, uniforme in media L^1 e in misura sull'intervallo $[0,1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = (n+x)\mathbb{1}_{[0,1/n]}(x)$$

3. Calcolare l'integrale

$$\int_A y \; dxdy,$$

dove $A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x^2 + y^2 < 1\}$.

4. Stabilire per quali $b > 0$ la funzione $f(x,y) = b|x|$ definisce una densità di probabilità $d\nu(x,y) = f(x,y)dxdy$ sugli insiemi misurabili secondo Lebesgue nell'insieme $[-1,1] \times [0,1]$. Calcolare poi per tale valore di b l'integrale

$$\int_A y d\nu(x,y)$$

5. Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x+n\sqrt{x})} dx \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[1,n]}(x) dx$$

giustificando i passaggi fatti.

ANALISI MATEMATICA LMSSFA–RIMINI 25 FEBBRAIO 2014

1. Studiare la convergenza puntuale, uniforme, in media L^1 e in misura sull'intervallo $[0,1]$ della successione di funzioni
$$f_n(x) = (1-nx)\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x).$$

2. Discutere la convergenza o divergenza delle serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{-n}}{n+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+e^{bn}}{n^3},$$
al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$.

3. È data la funzione
$$f(x,y) = mxy,$$
definita per $(x,y) \in Q = [0,1] \times [0,1]$. Stabilire il valore del parametro m che rende la misura $d\nu(x,y) := f(x,y)d\mu_2(x,y)$ una misura di probabilità sugli insiemi Lebesgue misurabili contenuti un Q.

   Calcolare poi
$$\int_Q e^{y^2+x} d\nu(x,y).$$

4. Calcolare ilimiti seguenti, giustificando i passaggi effettuati
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^x \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)dx \quad \text{e} \quad \int_2^3 \frac{n+xn^2}{n^2+x^2}dx$$