Distribuzioni spettrali nel caso Hermitiano

Debora Sesana

Dipartimento di Fisica e Matematica

Università dell'Insubria - Como

Sommario

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Distribuzione nel senso degli autovalori

- A_n matrice Hermitiana,

Distribuzione nel senso degli autovalori

- A_n matrice Hermitiana,
- $\{A_n\}$, $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, $d_n < d_{n+1}$,

Distribuzione nel senso degli autovalori

- A_n matrice Hermitiana,
- $\{A_n\}$, $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, $d_n < d_{n+1}$,
- θ misurabile su $K \subset \mathbb{R}^t$, $t \geq 1$,

Distribuzione nel senso degli autovalori

- A_n matrice Hermitiana,
- $\{A_n\}$, $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, $d_n < d_{n+1}$,
- θ misurabile su $K \subset \mathbb{R}^t$, $t \geq 1$,
- $0 < \mu\{K\} < \infty$, $\mu\{\cdot\}$ misura di Lebesgue,

Distribuzione nel senso degli autovalori

- A_n matrice Hermitiana,
- $\{A_n\}$, $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, $d_n < d_{n+1}$,
- θ misurabile su $K \subset \mathbb{R}^t$, $t \geq 1$,
- $0 < \mu\{K\} < \infty$, $\mu\{\cdot\}$ misura di Lebesgue,
- $F \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ (continue con supporto compatto),

Distribuzione nel senso degli autovalori

- A_n matrice Hermitiana,
- $\{A_n\}$, $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, $d_n < d_{n+1}$,
- θ misurabile su $K \subset \mathbb{R}^t$, $t \geq 1$,
- $0 < \mu\{K\} < \infty$, $\mu\{\cdot\}$ misura di Lebesgue,
- $F \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ (continue con supporto compatto),
- $\Sigma_\lambda(F, A_n) = \frac{1}{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} F[\lambda_j(A_n)]$.

Distribuzione nel senso degli autovalori

- A_n matrice Hermitiana,
- $\{A_n\}$, $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, $d_n < d_{n+1}$,
- θ misurabile su $K \subset \mathbb{R}^t$, $t \geq 1$,
- $0 < \mu\{K\} < \infty$, $\mu\{\cdot\}$ misura di Lebesgue,
- $F \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ (continue con supporto compatto),
- $\Sigma_\lambda(F, A_n) = \frac{1}{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} F[\lambda_j(A_n)]$.

Definizione 1 *La successione $\{A_n\}$ si distribuisce nel senso degli autovalori come la funzione θ sull'insieme K (in simboli $\{A_n\} \sim_\lambda (\theta, K)$) se*

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_\lambda(F, A_n) = \frac{1}{\mu\{K\}} \int_K F\left(\theta(s)\right)\, \mathrm{d}s, \quad \forall F \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}).$$

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Matrici di Toeplitz

- $f \in L^1(0, 2\pi)$,

Matrici di Toeplitz

- $f \in L^1(0, 2\pi)$,
- a_j coefficienti di Fourier di f:

Matrici di Toeplitz

- $f \in L^1(0, 2\pi)$,
- a_j coefficienti di Fourier di f:

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-\hat{\imath} j s} \mathsf{d}s, \qquad \hat{\imath}^2 = -1, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Matrici di Toeplitz

- $f \in L^1(0, 2\pi)$,
- a_j coefficienti di Fourier di f:

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-\hat{\imath} j s} \mathrm{d}s, \qquad \hat{\imath}^2 = -1, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

La matrice di Toeplitz $T_n(f)$ è definita come

$$T_n(f) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-(n-2)} & a_{-(n-1)} \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-(n-2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Matrici di Toeplitz

- $f \in L^1(0, 2\pi)$,
- a_j coefficienti di Fourier di f:

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-\hat{\imath} j s} \mathrm{d}s, \qquad \hat{\imath}^2 = -1, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

La matrice di Toeplitz $T_n(f)$ è definita come

$$T_n(f) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-(n-2)} & a_{-(n-1)} \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-(n-2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = [a_{r-k}]_{r,k=1}^{n},$$

Matrici di Toeplitz

- $f \in L^1(0, 2\pi)$,
- a_j coefficienti di Fourier di f:

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-\hat{\imath} j s} \mathsf{d}s, \qquad \hat{\imath}^2 = -1, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

La matrice di Toeplitz $T_n(f)$ è definita come

$$T_n(f) = [a_{r-k}]_{r,k=1}^{n},$$

f è detta simbolo o funzione generatrice di $T_n(f)$.

Matrici di Toeplitz

- $f \in L^1(0, 2\pi)$,
- a_j coefficienti di Fourier di f:

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-\hat{\imath} j s} \mathrm{d}s, \qquad \hat{\imath}^2 = -1, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

La matrice di Toeplitz $T_n(f)$ è definita come

$$T_n(f) = [a_{r-k}]_{r,k=1}^{n},$$

f è detta simbolo o funzione generatrice di $T_n(f)$.
Se f è a valori reali allora la matrice $T_n(f)$ è Hermitiana, cioè $a_j = \overline{a_{-j}}$.

Operatore di Laplace

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -u''(x) = g(x) \quad x \in (0,1), \\ \text{BC di Dirichlet.} \end{cases}$$

Operatore di Laplace

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -u''(x) = g(x) \quad x \in (0,1), \\ \text{BC di Dirichlet.} \end{cases}$$

$$\Big\Downarrow \text{discretizzazione alle Differenze Finite}$$

$$A_n \underline{u} = \underline{\tilde{g}}$$

Operatore di Laplace

La matrice A_n ottenuta dalla discretizzazione dell'operatore di Laplace è data da

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Operatore di Laplace

La matrice A_n ottenuta dalla discretizzazione dell'operatore di Laplace è data da

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_j^{(n)}(A_n)?$$

Operatore di Laplace

La matrice A_n ottenuta dalla discretizzazione dell'operatore di Laplace è data da

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_j^{(n)}(A_n)?$$

- $A_n = T_n(f)$ con $f(t) = 2 - 2\cos(t)$,

Operatore di Laplace

La matrice A_n ottenuta dalla discretizzazione dell'operatore di Laplace è data da

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_j^{(n)}(A_n)?$$

- $A_n = T_n(f)$ con $f(t) = 2 - 2\cos(t)$,
- $\lambda_j^{(n)} = 2 - 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$, per $j = 1, \ldots, n$.

Derivata quarta

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u''''(x) = g(x) & x \in (0,1), \\ \text{BC di Dirichlet, omogenee su } u' & \end{cases}$$

Derivata quarta

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u''''(x) = g(x) & x \in (0,1), \\ \text{BC di Dirichlet, omogenee su } u' & \end{cases}$$

$$\Downarrow \text{discretizzazione alle Differenze Finite}$$

$$A_n \underline{u} = \underline{\tilde{g}}$$

Derivata quarta

La matrice A_n ottenuta dalla discretizzazione dell'operatore di derivazione $(\cdot)''''$ è data da

$$A_n = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & & \\ -4 & 6 & -4 & \ddots & \\ 1 & -4 & \ddots & \ddots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -4 \\ & & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix},$$

Derivata quarta

La matrice A_n ottenuta dalla discretizzazione dell'operatore di derivazione $(\cdot)''''$ è data da

$$A_n = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & & \\ -4 & 6 & -4 & \ddots & \\ 1 & -4 & \ddots & \ddots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -4 \\ & & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_j^{(n)}(A_n)?$$

Derivata quarta

La matrice A_n ottenuta dalla discretizzazione dell'operatore di derivazione $(\cdot)''''$ è data da

$$A_n = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & & \\ -4 & 6 & -4 & \ddots & \\ 1 & -4 & \ddots & \ddots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -4 \\ & & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_j^{(n)}(A_n)?$$

- $A_n = T_n(f)$ con $f(t) = (2 - 2\cos(t))^2$,

Derivata quarta

La matrice A_n ottenuta dalla discretizzazione dell'operatore di derivazione $(\cdot)''''$ è data da

$$A_n = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & & \\ -4 & 6 & -4 & \ddots & \\ 1 & -4 & \ddots & \ddots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -4 \\ & & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_j^{(n)}(A_n)?$$

- $A_n = T_n(f)$ con $f(t) = (2 - 2\cos(t))^2$,
- $\lambda_j^{(n)}$ non sono noti in forma chiusa.

Teorema 1 *Se f è integrabile sopra $Q = [0, 2\pi)$, a valori reali, e se $\{T_n(f)\}$ è la successione delle matrici di Toeplitz generate da f, allora vale che*

$$\{T_n(f)\} \sim_\lambda (f, Q).$$

Teorema 1 *Se f è integrabile sopra $Q = [0, 2\pi)$, a valori reali, e se $\{T_n(f)\}$ è la successione delle matrici di Toeplitz generate da f, allora vale che*

$$\{T_n(f)\} \sim_\lambda (f, Q).$$

f a valori reali $\Rightarrow T_n(f)$ Hermitiana.

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Motivazioni

Motivazioni

- analisi della convergenza dei metodi di gradiente coniugato (Beckermann, Kuijlaars);

Motivazioni

- analisi della convergenza dei metodi di gradiente coniugato (Beckermann, Kuijlaars);
- applicazioni in statistica (Bercu, Gamboa,...);

Motivazioni

- analisi della convergenza dei metodi di gradiente coniugato (Beckermann, Kuijlaars);
- applicazioni in statistica (Bercu, Gamboa,...);
- supporto alle comunicazioni wireless (Gutierrez, Crespo, Najim, Gray,...);

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Strumenti di approssimazione: $a.c.s.$

Definizione 2 *Sia* $\{A_n\}$ *con* $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$*,* $d_n < d_{n+1}$*.* $\{\{B_{n,m}\}\}_m$*,* $m \in \mathbb{N}$ *è una classe approssimante di successioni (*$a.c.s.$*) per* $\{A_n\}$ *se*

$$A_n = B_{n,m} + R_{n,m} + N_{n,m}, \quad \forall n > n_m, \forall m \in \mathbb{N},$$

$$\mathrm{Rango}(R_{n,m}) \leq d_n c(m), \quad \|N_{n,m}\| \leq w(m),$$

dove $n_m \geq 0, c(m)$ *e* $w(m)$ *sono funzioni che dipendono solo da* m *e*

$$\lim_{m\to\infty} w(m) = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} c(m) = 0.$$

Strumenti di approssimazione: $a.c.s.$

Definizione 2 *Sia* $\{A_n\}$ *con* $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$*,* $d_n < d_{n+1}$*.* $\{\{B_{n,m}\}\}_m$*,* $m \in \mathbb{N}$ *è una classe approssimante di successioni (*$a.c.s.$*) per* $\{A_n\}$ *se*

$$A_n = B_{n,m} + R_{n,m} + N_{n,m}, \quad \forall n > n_m, \forall m \in \mathbb{N},$$

$$\mathrm{Rango}(R_{n,m}) \le d_n c(m), \quad \|N_{n,m}\| \le w(m),$$

dove $n_m \ge 0, c(m)$ *e* $w(m)$ *sono funzioni che dipendono solo da* m *e*

$$\lim_{m\to\infty} w(m) = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} c(m) = 0.$$

- A_n Hermitiana $\Rightarrow B_{n,m}, R_{n,m}, N_{n,m}$ Hermitiane.

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Teorema di distribuzione

Teorema 2 *Sia* $\{A_n\}$ *una successione di matrici Hermitiane, con* $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, $d_n < d_{n+1}$.
Sotto le seguenti ipotesi:

Teorema di distribuzione

Teorema 2 *Sia* $\{A_n\}$ *una successione di matrici Hermitiane, con* $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, $d_n < d_{n+1}$.
Sotto le seguenti ipotesi:

- $\{\{B_{n,m}\}\}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $B_{n,m}$ *Hermitiane*, $a.c.s.$ *per* $\{A_n\}$,

$$\{\{B_{n,m}\}\}_m \xrightarrow[\text{ipotesi 1}]{a.c.s.} \{A_n\}$$

Teorema di distribuzione

Teorema 2 *Sia* $\{A_n\}$ *una successione di matrici Hermitiane, con* $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, $d_n < d_{n+1}$.
Sotto le seguenti ipotesi:

- $\{\{B_{n,m}\}\}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $B_{n,m}$ *Hermitiane,* $a.c.s.$ *per* $\{A_n\}$,
- $\{B_{n,m}\} \sim_\lambda (f_m, K)$, f_m *a valori reali,*

$$
\begin{array}{ccc}
\{\{B_{n,m}\}\}_m & \xrightarrow[\text{ipotesi 1}]{a.c.s.} & \{A_n\} \\
\sim_\lambda \Big\downarrow \text{ipotesi 2} & & \\
\{f_m\}_m & &
\end{array}
$$

Teorema di distribuzione

Teorema 2 *Sia* $\{A_n\}$ *una successione di matrici Hermitiane, con* $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$*,* $d_n < d_{n+1}$*.*
Sotto le seguenti ipotesi:

- $\{\{B_{n,m}\}\}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $B_{n,m}$ Hermitiane, $a.c.s.$ per $\{A_n\}$,
- $\{B_{n,m}\} \sim_\lambda (f_m, K)$, f_m a valori reali,
- $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mu} f$,

$$\begin{tikzcd}
\{\{B_{n,m}\}\}_m \arrow[rr, "a.c.s."', "\text{ipotesi 1}"'] \arrow[d, "\sim_\lambda"', "\text{ipotesi 2}"] & & \{A_n\} \\
\{f_m\}_m \arrow[rr, "\text{in misura}", "{m \to \infty}"'] & & f
\end{tikzcd}$$

ipotesi 3

Teorema di distribuzione

Teorema 2 *Sia* $\{A_n\}$ *una successione di matrici Hermitiane, con* $A_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, $d_n < d_{n+1}$.
Sotto le seguenti ipotesi:

- $\{\{B_{n,m}\}\}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $B_{n,m}$ Hermitiane, $a.c.s.$ per $\{A_n\}$,
- $\{B_{n,m}\} \sim_\lambda (f_m, K)$, f_m a valori reali,
- $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mu} f$,

$$\begin{tikzcd}
\{\{B_{n,m}\}\}_m \arrow[rr, "a.c.s."', "\text{ipotesi 1}"'] \arrow[d, "\sim_\lambda"', "\text{ipotesi 2}"] & & \color{red}{\{A_n\}} \arrow[d, color=red, "\text{tesi}"', "\sim_\lambda"] \\
\{f_m\}_m \arrow[rr, "\text{in misura}", "m \to \infty"'] & & \color{red}{f}
\end{tikzcd}$$

ipotesi 3

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Sommario

- definizione di distribuzione nel senso degli autovalori per una successione di matrici Hermitiane;
  - esempio: matrici di Toeplitz;
- motivazioni;
- strumenti di approssimazione;
  - definizione di classe approssimante di successioni;
  - teorema principale di distribuzione;
- alcuni risultati.

Algebrizzazione

Proposizione 1 *Se* $\{\{B^{(1)}_{n,m}\}\}_m$ *e* $\{\{B^{(2)}_{n,m}\}\}_m$ *sono* $a.c.s.$ *per* $\{A^{(1)}_n\}$ *e* $\{A^{(2)}_n\}$, $A^{(1)}_n, A^{(2)}_n \in M_{d_n}(\mathbb{C})$*, allora*

Algebrizzazione

Proposizione 1 *Se* $\{\{B_{n,m}^{(1)}\}\}_m$ *e* $\{\{B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *sono* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)}\}$ *e* $\{A_n^{(2)}\}$*,* $A_n^{(1)}, A_n^{(2)} \in M_{d_n}(\mathbb{C})$*, allora*

- $\{\{B_{n,m}^{(1)} + B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *è un* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)} + A_n^{(2)}\}$*;*

Algebrizzazione

Proposizione 1 *Se* $\{\{B_{n,m}^{(1)}\}\}_m$ *e* $\{\{B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *sono* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)}\}$ *e* $\{A_n^{(2)}\}$*,* $A_n^{(1)}, A_n^{(2)} \in M_{d_n}(\mathbb{C})$*, allora*

- $\{\{B_{n,m}^{(1)} + B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *è un* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)} + A_n^{(2)}\}$*;*
- $\{\{B_{n,m}^{(1)} B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *è un* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)} A_n^{(2)}\}$ *se in aggiunta sia* $\{A_n^{(1)}\}$ *sia* $\{A_n^{(2)}\}$ *sono* $s.u.$*;*

Algebrizzazione

Proposizione 1 *Se* $\{\{B_{n,m}^{(1)}\}\}_m$ *e* $\{\{B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *sono* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)}\}$ *e* $\{A_n^{(2)}\}$*,* $A_n^{(1)}, A_n^{(2)} \in M_{d_n}(\mathbb{C})$*, allora*

- $\{\{B_{n,m}^{(1)} + B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *è un* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)} + A_n^{(2)}\}$*;*
- $\{\{B_{n,m}^{(1)} B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *è un* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)} A_n^{(2)}\}$ *se in aggiunta sia* $\{A_n^{(1)}\}$ *sia* $\{A_n^{(2)}\}$ *sono* $s.u.$*;*

Definizione 3 *Una successione di matrici* $\{A_n\}$ *è detta sparsamente illimitata (*$s.u.$*) se per ogni* $M > 0$ *esiste* $\bar{n}_M$ *tale che per* $n \geq \bar{n}_M$ *vale*

$$\sharp\{i : |\lambda_i(A_n)| > M\} \leq r(M) d_n, \qquad \lim_{M\to\infty} r(M) = 0.$$

Algebrizzazione

Proposizione 1 *Se* $\{\{B_{n,m}^{(1)}\}\}_m$ *e* $\{\{B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *sono* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)}\}$ *e* $\{A_n^{(2)}\}$, $A_n^{(1)}, A_n^{(2)} \in M_{d_n}(\mathbb{C})$, *allora*

- $\{\{B_{n,m}^{(1)} + B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *è un* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)} + A_n^{(2)}\}$*;*
- $\{\{B_{n,m}^{(1)} B_{n,m}^{(2)}\}\}_m$ *è un* $a.c.s.$ *per* $\{A_n^{(1)} A_n^{(2)}\}$ *se in aggiunta sia* $\{A_n^{(1)}\}$ *sia* $\{A_n^{(2)}\}$ *sono* $s.u.$*;*

$$\Downarrow$$

$\{\{p(B_{n,m}^{(1)})\}\}_m$ *è un* $a.c.s.$ *per* $\{p(A_n^{(1)})\}$, *per ogni polinomio* p *di grado fissato indipendente da* n, *se* $\{A_n^{(1)}\}$ *è* $s.u.$

Teorema sull'algebrizzazione delle $a.c.s.$

Teorema 3 *Se* $\{A_n\}$ *è una successione di matrici Hermitiane sparsamente illimitata (*$s.u.$*) e* $\{\{B_{n,m}\}\}_m$ *è una qualsiasi* $a.c.s$ *per* $\{A_n\}$ *(*$B_{n,m}$ *tutte Hermitiane), allora per ogni funzione* $f \in C(\mathbb{R})$ *vale che* $\{\{f(B_{n,m})\}\}_m$ *è un* $a.c.s.$ *per* $\{f(A_n)\}$*.*

Altri sviluppi

Gestire il caso non Hermitiano è più delicato;

Altri sviluppi

Gestire il caso non Hermitiano è più delicato;

Risultati generali di clustering e distribuzione sono stati ottenuti tramite:

Altri sviluppi

Gestire il caso non Hermitiano è più delicato;

Risultati generali di clustering e distribuzione sono stati ottenuti tramite:

- un'idea di Tilli (geometria del range),

Altri sviluppi

Gestire il caso non Hermitiano è più delicato;

Risultati generali di clustering e distribuzione sono stati ottenuti tramite:

- un'idea di Tilli (geometria del range),
- maggiorizzazione: teorema di Mirski.

Bibliografia

- S. Serra Capizzano, D. Sesana, *Approximation Class of Sequences: the Hermitian Case*, in stampa “Heining Memorial Volume”.
- S. Serra Capizzano, D. Sesana, E. Strouse, *The product of sequences of Toeplitz matrices: eigenvalue distribution, clustering, and attracting features*, Studia Math., submitted.
- S. Serra Capizzano, D. Sesana, *Mirski-based tools for the eigenvalue distribution in a non-Hermitian setting*, LAA, submitted.