

Corso di Laurea : Informatica
Prova scritta di Complementi di Analisi Matematica
del 12/01/2010

(1121212)

COGNOME E NOME _____
N. MATRICOLA _____

1. Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + (k^2 + 2)x_2 + (k + 1)x_3 = 0 \\ (k - 4)x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

2. Sia data la seguente applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3).$$

- (a) Determinare gli autovalori di f , calcolando la loro molteplicità algebrica e geometrica.
- (b) Stabilire, giustificandolo, se f sia diagonalizzabile.
- (c) Determinare una base degli autospazi di f .
- (d) Nel caso f sia diagonalizzabile, individuare una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 rispetto a cui la matrice $A_{\mathcal{B}}$ di f sia diagonale; scrivere la matrice $A_{\mathcal{B}}$; calcolare le matrici $M, M^{-1} \in \text{Mat}_3$ tali che

$$A_{\mathcal{B}} = M^{-1}A_{\mathcal{E}}M, \tag{1}$$

dove $A_{\mathcal{E}}$ rappresenta la matrice di f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

- (e) Verificare la relazione (1).

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy del I ordine

$$\begin{cases} y' - 2xy = e^{x^2} \cos x \\ y(0) = 2 . \end{cases}$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy del II ordine

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 . \end{cases}$$