Corso di Laurea : Informatica
Prova scritta di Complementi di Analisi Matematica
del 20/07/2010

(1121212)

COGNOME E NOME ____
N. MATRICOLA ________________________

1. Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ (k+4)x_1 - x_2 = k+1 \end{cases}$$

   Discutere la risolubilità del sistema e determinare la dimensione (affine) dello spazio delle soluzioni (qualora esistano), al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

2. Sia data la seguente applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3).$$

   (a) Determinare gli autovalori di f, calcolando la loro molteplicità algebrica e geometrica.

   (b) Stabilire, giustificandolo, se f sia diagonalizzabile.

   (c) Determinare una base degli autospazi di f.

   (d) Nel caso f sia diagonalizzabile, individuare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui la matrice $A_{\mathcal{B}}$ di f sia diagonale; scrivere la matrice $A_{\mathcal{B}}$; calcolare le matrici $M, M^{-1} \in \mathrm{Mat}_3$ tali che

$$A_{\mathcal{B}} = M^{-1} A_{\mathcal{E}} M, \tag{1}$$

   dove $A_{\mathcal{E}}$ rappresenta la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   (e) Verificare la relazione (1).

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy del I ordine

$$\begin{cases} y' + 2xy = 2x^3 \\ y(0) = 1 \ . \end{cases}$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy del II ordine

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 6e^{-2x} \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -2 \ . \end{cases}$$