Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica
10 giugno 2016
Prof. Vania Sordoni - Prof. Marco Mughetti

Esercizio 1(pt.4)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} \frac{\sin 2x}{x+x^2} & \text{per } x > 0 \\ ax + b & \text{per } x \leq 0 \end{array}$$

determinare per quali valori di $a, b \in \mathbf{R}$, la funzione f

- è continua per $x = 0$
- è derivabile per $x = 0$

giustificando il risultato.
Risposta:
Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 2x}{x + x^2} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} ax + b = b = f(0)$$

e quindi f è continua in $x = 0$ sse $b = 2$. Siccome

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{\sin 2h}{h+h^2} - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h + o(h^2) - 2h - 2h^2}{h^2(1+h)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2(o(1) - 2)}{h^2(1+h)} = -2$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{ah + 2 - 2}{h} = a$$

La funzione quindi è derivabile nel punto $x = 0$ sse $a = -2$.

Esercizio 2(pt. 6)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{1 - \ln |3x|}{x^2}$$

I. Disegnare il suo grafico.

II. Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni reali distinte.

Risposta:
I. La funzione f è definita su $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbf{R}\ ;\ x \neq 0\}$ ed è pari. Basta quindi studiarla per $x > 0$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty, \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

La funzione è derivabile certamente su $\mathcal{D}(f)$ e si ha, per $x > 0$

$$f'(x) = \frac{x(2\ln 3x - 3)}{x^4}$$

Quindi $f'(x) = 0$ sse $x = e^{3/2}/3$ e $f(e^{3/2}/3) = -\frac{9}{2e^3}$ Inoltre $x = e^{3/2}/3$ è un punto di minimo relativo e assoluto per f

II. Quindi Im$f = [-\frac{9}{2e^3}, +\infty[$.
III. L'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni reali distinte per $\lambda \geq 0 \vee \lambda = -\frac{9}{2e^3}$.

Esercizio 3(pt. 5)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4)$
- $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + o(t^7)$
- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$
- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)$
- $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} + o(t^4)$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x + 2x^2) + \cos(e^{2x} - 1) - 1 - x}{\ln(\sqrt{1+x^3}) + \ln(1 + x^3/2)}$$

Risposta:

Usando gli sviluppi di Taylor dati sopra, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\sin(x+2x^2) &= (x+2x^2) - \frac{1}{6}(x+2x^2)^3 + o(x^3) = x + 2x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
\cos(e^{2x}-1) &= \cos(2x+2x^2+o(x^2)) = 1 - \frac{1}{2}(2x+2x^2+o(x^2))^2 + o(x^3) =
\end{aligned}$$

$1 - 2x^2 - 4x^3 + o(x^3)$

$$\begin{aligned}
\ln(\sqrt{1+x^3}) &= \ln(1+\frac{x^3}{2} + o(x^3)) = \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
\ln(1+x^3/2) &= x^3/2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Pertanto, si ricava che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+2x^2) + \cos(e^{2x}-1) - 1 - x}{\ln(\sqrt{1+x^3}) + \ln(1+x^3/2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{25x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = -\frac{25}{6}$$

Esercizio 4(pt. 5)
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 + 2x + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x}\, dx.$$

Risposta:
Si ha che:

$$\frac{x^3 - x^2 + 2x + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x} = 1 + \frac{3x^2 - 6x + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x}.$$

Dunque:

$$\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 + 2x + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x}\, dx = \int_1^2 1\, dx + \int_1^2 \frac{3x^2 - 6x + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x}\, dx = 1 + \int_1^2 \frac{3x^2 - 6x + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x}\, dx,$$

Si calcola che:

$$\frac{3x^2 - 6x + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x} = \frac{1}{x} + \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 8} + \frac{2}{(x-2)^2 + 4},$$

quindi:

$$\int_1^2 \frac{3x^2 - 6x + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x}\, dx = \int_1^2 (\frac{1}{x} + \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 8} + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{(x-2)^2}{4} + 1})\, dx,$$

$$= [\ln|x| + \ln|x^2 - 4x + 8| + \arctan\left(\frac{x-2}{2}\right)]_1^2 = \ln\frac{8}{5} + \arctan\frac{1}{2}.$$

In conclusione:

$$\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 + 2x + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x}\, dx = 1 + \ln\frac{8}{5} + \arctan\frac{1}{2}$$

Esercizio 5(pt. 5)
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = y^4 - y^2 + x^2 - 2xy - 4$$

I) Calcolare i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
II) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(2, -1)$.
Risposta:
I) Si calcolano i punti critici di f:

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y = 0 \\ f_y = 4y^3 - 2y - 2x = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} x = y \\ y^3 - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y(y^2 - 1) = 0 \implies y = 0, \pm 1 \end{cases}$$

I punti critici sono $(0, 0), (\pm 1, \pm 1)$.
Si calcola la matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix},$$

pertanto:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \implies \quad (0, 0) \text{ Punto di sella;}$$

$$H_f(\pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \implies \quad (\pm 1, \pm 1) \text{ Punti di minimo;}$$

II) Il piano tangente ad f nel punto $(2, -1)$ è

$$z = f(2, -1) + \langle \nabla f(2, -1), (x-2, y+1) \rangle = 4 + \langle (6, -6), (x-2, y+1) \rangle = -14 + 6x - 6y.$$

$$\implies z = -14 + 6x - 6y.$$

Esercizio 6(pt. 5)
Calcolare
$$\iint_A \cos x \; dx \, dy,$$
dove
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \leq y, 2\pi x \leq y \leq 3\pi x\}.$$

Risposta:
Si ha che:
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0, 2\pi],\; 2\pi x \leq y \leq 3\pi x\} \cup$$
$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [2\pi, 3\pi],\; x^2 \leq y \leq 3\pi x\}.$$
Quindi:
$$\iint_A \cos x \; dx \, dy = \int_0^{2\pi} \cos x \Big(\int_{2\pi x}^{3\pi x} 1 dy \Big) dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \cos x \Big(\int_{x^2}^{3\pi x} 1 dy \Big) dx$$
Calcoliamo separatamente i due integrali per parti:
$$\int_0^{2\pi} \cos x \Big(\int_{2\pi x}^{3\pi x} 1 dy \Big) dx = \pi \int_0^{2\pi} x \cos x dx = \underbrace{[\pi x \sin x]_0^{2\pi}}_{=0} - \pi \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$
$$\int_{2\pi}^{3\pi} \cos x \Big(\int_{x^2}^{3\pi x} 1 dy \Big) dx = \int_{2\pi}^{3\pi} (3\pi x - x^2) \cos x dx = \underbrace{[(3\pi x - x^2) \sin x]_{2\pi}^{3\pi}}_{=0} - \int_{2\pi}^{3\pi} (3\pi - 2x) \sin x dx$$
$$= [(3\pi - 2x) \cos x]_{2\pi}^{3\pi} + \underbrace{\int_{2\pi}^{3\pi} 2 \cos x dx}_{=0} = 4\pi.$$