Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica
23 maggio 2016
Prof. Vania Sordoni - Prof. Marco Mughetti

Esercizio 1
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 8x + 1$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(y) = \cos^3(y)$, scrivere (se esistono) le funzioni composte $gof(x)$, $x \in \mathbf{R}$ e $fog(y)$, $y \in \mathbf{R}$ e calcolare (se esistono) le derivate delle funzioni composte

$$\frac{d(gof)}{dx}(x),\ x \in \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \frac{d(fog)}{dy}(y),\ y \in \mathbf{R}$$

Risposta:
Entrambe le funzioni sono definite su tutto $\mathbf{R}$ e ivi derivabili. Quindi esistono e sono derivabili le loro funzioni composte. Si ha $gof(x) = \cos^3(x^2+8x+1)$, $fog(y) = \cos^6(y) + 8\cos^3(y) + 1$ e quindi

$$\frac{d(gof)}{dx}(x) = -6(x+4)\cos^2(x^2+8x+1)\sin(x^2+8x+1)$$

$$\frac{d(fog)}{dy}(y) = -6\cos^5(y)\sin(y) - 24\cos^2(y)\sin(y)$$

Esercizio 2
Sia data la funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = 3^{\frac{x}{x^2+2x+2}}$$

I Disegnare il suo grafico.

II Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Per quali valori di $\lambda \in \mathbf{R}$, l'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni distinte?
.

Risposta:
I. La funzione f è definita su tutto $\mathbf{R}$ e derivabile su tutto $\mathbf{R}$. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

Si ha

$$f'(x) = -3^{\frac{x}{x^2+2x+2}} \frac{(x^2-2)\ln 3}{(x^2+2x+2)^2}$$

e quindi $f'(x) = 0$ sse $x = \pm\sqrt{2}$. Inoltre $f(\sqrt{2}) = 3^{\frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}$ e $f(-\sqrt{2}) = 3^{-\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}}$. Il punto $x = -\sqrt{2}$ è un punto di minimo locale mentre il punto $x = \sqrt{2}$ è un punto di massimo locale.

II. Dal punto precedente si ottiene che $\mathrm{Im} f = [3^{-\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}}, 3^{\frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}]$.

III. L'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni distinte per $\lambda \in]3^{-\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}}, 1[\cup]1, 3^{\frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}[$.

Esercizio 3

Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$
- $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + o(t^7)$
- $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4)$
- $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4 + o(t^4)$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+4x+8x^2)^{1/4} - e^x}{\cos(\sin(2x+x^2)) - e^{-2x^2}}$$

Risposta:

Usando gli sviluppi di Taylor dati sopra, si ottiene che

$$(1+4x+8x^2)^{1/4} = 1 + \frac{(4x+8x^2)}{4} - \frac{3}{32}(4x+8x^2)^2 + \frac{7}{128}(4x+8x^2)^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x^3 + o(x^3)$$

e quindi

$$(1+4x+8x^2)^{1/4} - e^x = -\frac{8}{3}x^3(1+o(1))$$

Inoltre

$$\sin(2x+x^2) = 2x + x^2 + o(x^2)$$

$$\cos(\sin(2x+x^2)) = 1 - \frac{(2x+x^2+o(x^2))^2}{2} + o(x^3) = 1 - 2x^2 - 2x^3 + o(x^3)$$

e

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + o(x^3)$$

e quindi

$$\cos(\sin(2x+x^2)) - e^{-2x^2} = -2x^3(1+o(1))$$

Pertanto, si ricava che

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+4x+8x^2)^{1/4}-e^x}{\cos(\sin(2x+x^2))-e^{-2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{8}{3}x^3(1+o(1))}{-2x^3(1+o(1))} = \frac{4}{3}$$

Esercizio 4
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^3-2x^2+x}\, dx.$$

Risposta:
Si ha che:

$$\frac{x^3+1}{x^3-2x^2+x} = 1 + \frac{2x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}.$$

Dunque:

$$\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^3-2x^2+x}\, dx = \int_2^4 1\, dx + \int_2^4 \frac{2x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}\, dx = 2 + \int_2^4 \frac{2x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}\, dx,$$

Si calcola che:

$$\frac{2x^2-x+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2},$$

quindi:

$$\int_2^4 \frac{2x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}\, dx = \int_2^4 (\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2})\, dx,$$

$$= [\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1}]_2^4 = 4/3 + \ln 6.$$

In conclusione:

$$\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^3-2x^2+x}\, dx = 10/3 + \ln 6$$

Esercizio 5
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = x^2y - \frac{4}{3}y^3 - 2x^2 + 12y$$

I) Calcolare i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
II) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(-1,1)$.
Risposta:
I) Si calcolano i punti critici di f:

$$\begin{cases} f_x = 2xy - 4x = 0 \\ f_y = x^2 - 4y^2 + 12 = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} x(y-2) = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 12 = 0 \end{cases}$$

Si hanno due casi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow (0, \pm\sqrt{3});$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Longrightarrow (\pm 2, 2);$$

I punti critici sono $(\pm 2, 2), (0, \pm\sqrt{3})$.
Si calcola la matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} 2y-4 & 2x \\ 2x & -8y \end{pmatrix},$$

pertanto:

$$H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -16 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (2,2) \text{ Punto di sella;}$$

$$H_f(-2,2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -16 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (-2,2) \text{ Punto di sella;}$$

$$H_f(0,\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 & 0 \\ 0 & -8\sqrt{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (0,\sqrt{3}) \text{ Punto di massimo relativo;}$$

$$H_f(0,-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3}-4 & 0 \\ 0 & 8\sqrt{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (0,-\sqrt{3}) \text{ Punto di sella.}$$

II) Il piano tangente ad f nel punto $(-1,1)$ è

$$z = f(-1,1) + \langle \nabla f(-1,1), (x+1, y-1) \rangle = 29/3 + \langle (2,9), (x+1, y-1) \rangle = 8/3 + 2x + 9y.$$

$$\Longrightarrow z = 8/3 + 2x + 9y.$$

Esercizio 6
Calcolare
$$\iint_A 3y^2\ dx\,dy,$$
dove
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - \pi x \leq y \leq \sin x\}.$$
Risposta:
Si ha che:
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0,\pi], x^2 - \pi x \leq y \leq \sin x\}.$$
Quindi:
$$\iint_A 3y^2\ dx\,dy = \int_0^\pi \Big(\int_{x^2-\pi x}^{\sin x} 3y^2 dy\Big) dx = \int_0^\pi [y^3]_{x^2-\pi x}^{\sin x} dx$$
$$= \int_0^\pi (\sin x)^3 dx - \int_0^\pi (x^2 - \pi x)^3 dx.$$
Calcoliamo separatamente i due integrali:
$$\int_0^\pi (\sin x)^3 dx = \int_0^\pi \sin x(1 - \cos^2 x) dx = \int_0^\pi \sin x dx + \int_0^\pi \cos^2 x(-\sin x) dx$$
$$= [-\cos x + \cos^3 x/3]_0^\pi = 4/3$$
Il secondo integrale si può calcolare direttamente esplicitando il cubo del binomio $(x^2 - \pi x)^3$, oppure integrando ripetutamente per parti tenendo conto che $(x^2 - \pi x)^3 = x^3(x-\pi)^3$ e che i fattori x e $x - \pi$ si annullano sugli estremi di integrazione $0, \pi$:
$$\int_0^\pi (x^2 - \pi x)^3 dx = \int_0^\pi x^3(x-\pi)^3 dx = \underbrace{[x^4/4(x-\pi)^3]_0^\pi}_{=0} - \frac{3}{4}\int_0^\pi x^4(x-\pi)^2 dx$$
$$= \frac{3}{10}\int_0^\pi x^5(x-\pi) dx = -\frac{1}{20}\int_0^\pi x^6 * 1 dx = -\frac{1}{20}[x^7/7]_0^\pi = -\frac{1}{140}\pi^7.$$