Corso di Laurea in Astronomia
Algebra Lineare e Geometria
Esercitazione
Docente: Nicoletta Cantarini
Bologna, 19 ottobre 2020

Risolvere alcuni tra i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Sia $S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 0\}$. Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^2$ nei seguenti casi:

a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$;

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Costruire, se possibile, una funzione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Siano $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, $V = span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $T = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

a) Determinare una base di $U \cap V$;

b) Mostrare che $T \oplus U = \mathbb{R}^3 = T \oplus V$;

c) Indicate rispettivamente con π_T e π'_T le proiezioni su T rispetto alle decomposizioni $\mathbb{R}^3 = T \oplus U$ e $\mathbb{R}^3 = T \oplus V$, determinare tutti i vettori v di $\mathbb{R}^3$ tali che $\pi_T(v) = \pi'_T(v) = (1, 0, 0)$.

Esercizio 4. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{Q}^4$:

$$U = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\} \quad V = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z + t = 0,\ x - y + z - 2t = 0\}.$$

Calcolare la dimensione dei sottospazi U, V, $U \cap V$, esibendo una base per ciascuno di essi. Completare la base di $U \cap V$ scelta in una base di $U + V$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \end{pmatrix}.$$

Determinare nucleo e immagine di f e stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.
Sia ora $g : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$g(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \\ p(2) \end{pmatrix}.$$

Stabilire se g è iniettiva e/o suriettiva.