

Corso di Laurea in Astronomia

Algebra Lineare e Geometria

Esercitazione

Docente: Nicoletta Cantarini

Bologna, 26 ottobre 2020

Risolvere alcuni tra i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \mid x + y = 3 \right\}$. Mostrare che S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^2$ e determinare il più piccolo sottospazio di $\mathbb{K}^2$ che contiene S .

Esercizio 2. Mostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare l'immagine mediante f del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Sia $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \right\}$.

- a) Costruire un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $U + V = \mathbb{R}^3$ ma la somma di U e V non sia diretta.
- b) Costruire un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $U \oplus T = \mathbb{R}^3$.
- c) Considerata la decomposizione trovata in b), calcolare la proiezione su T del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

- a) Stabilire se f_A è iniettiva e/o suriettiva.
- b) Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$. Mostrare che $f_A(V) \subseteq V$.

Esercizio 5. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$: $U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Stabilire se esiste un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = V \oplus W = \mathbb{R}^4$. In caso affermativo determinare W .