Corso di Laurea in Astronomia
Algebra Lineare e Geometria
Esercitazione
Docente: Nicoletta Cantarini
Bologna, 23 novembre 2020

Risolvere alcuni tra i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire se f è invertibile.
2. Stabilire se f è diagonalizzabile.
3. Determinare gli autospazi di f.
4. Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Discutere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la risolubilità del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 2x + hy = 2 \\ hx + 2y = h \\ hy + hz = h \end{cases}$$

e, quando è possibile, determinarne le soluzioni.

Esercizio 3. Sia $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare definita da:

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

a) Scrivere la matrice associata a β rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Mostrare che β è simmetrica.

c) Stabilire se β è definita positiva e/o se $\mathbb{R}^3$ contiene vettori isotropi rispetto a β.

d) Dato $U = Span\{(1, -1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$, determinare una base del sottospazio $U^\perp$.

Esercizio 4. Discutere, al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{K}$ la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$