Corso di Laurea in Astronomia
Algebra Lineare e Geometria
Esercitazione 3 e recuperi
Docente: Nicoletta Cantarini
Bologna, 18 dicembre 2020

Risolvere alcuni tra i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Determinare la segnatura della forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

e sia β_A la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice A rispetto alla base canonica.

a) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

b) Verificare che la base $\mathcal{B}$ è ortogonale rispetto a β_A.

c) Stabilire se la matrice A è congruente alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Esercizio 3. Sia $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la riflessione del piano rispetto alla retta $x - 2y = 0$. Scrivere la matrice di σ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Recupero I esercitazione
Esercizio 4. Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbb{K}^4$ ($\alpha \in \mathbb{K}$):

$$V_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 - x_4 = 0, 3x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha $\mathbb{K}^4 = V_1 \oplus V_2$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{K}$, determinare:

- i valori di a per cui esiste un'unica applicazione lineare $f_a : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ tale che $f_a(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_a(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_a(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- i valori di $a \in \mathbb{K}$ tali che non esiste alcuna applicazione lineare $f_a : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ tale che $f_a(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_a(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_a(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Recupero II esercitazione

Esercizio 6. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare polinomio caratteristico e autovalori, con relative molteplicità algebrica e geometrica, delle matrici A, B, C.

b) Stabilire quali tra le matrici A, B, C sono simili tra loro.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione tre sul campo $\mathbb{R}$. Sia β una forma bilineare su V la cui matrice, rispetto a una base $\mathcal{B}$, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire se β è degenere.

b) Esistono vettori isotropi rispetto a β?

c) Trovare una base ortogonale per β.