

Corso di Laurea in Astronomia
Algebra Lineare e Geometria - II appello
Docente: Nicoletta Cantarini
Bologna, 27 gennaio 2021

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi:

Esercizio 1. Sia β la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcolare la segnatura di β .
- b) Determinare i vettori isotropi rispetto a β e stabilire se essi costituiscono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
- c) Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione due tale che la restrizione di β a W sia definita negativa.

Esercizio 2. Sia σ la riflessione di $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano π di equazione $x - y + z = 0$. Scrivere la matrice di σ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{Q}^4$ e siano

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\} \text{ e } W_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Siano $f : W_1 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ la restrizione a W_1 della moltiplicazione per la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

e $g_a : W_2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ l'applicazione tale che $g_a\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $g_a\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.

- a) Determinare una base di $W_1 \cap W_2$.
- b) Dire per quali $a \in \mathbb{Q}$ esiste $F : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ la cui restrizione a W_1 sia f e la cui restrizione a W_2 sia g_a . Per tali a , calcolare la matrice di F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{Q}^4$ e $\mathbb{Q}^2$.

Esercizio 4. Sia $A_a \in M_3(\mathbb{Q})$ la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2a - 2 & 1 & 0 \\ 3a - 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Per quali $a \in \mathbb{Q}$ la matrice A_a è diagonalizzabile?
- b) Esistono valori di $a \in \mathbb{Q}$ tali che la matrice A_a abbia un insieme infinito di sottospazi invarianti?