

Corso di Laurea in Astronomia
Algebra Lineare e Geometria - I appello
Docente: Nicoletta Cantarini
Bologna, 21 dicembre 2020

Risolvere tre dei seguenti sei esercizi:

Esercizio 1. Determinare la segnatura della forma bilineare β_A su $\mathbb{R}^3$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Stabilire se A è congruente alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a β_A .

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

e sia β_A la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice A rispetto alla base canonica.

- a) Determinare il radicale di β_A .
- b) Determinare l'insieme dei vettori isotropi rispetto a β_A e stabilire se esso è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
- c) Sia $U = \text{Span}\{(0, 1, 0)^T, (1, 2, 1)^T\}$. Calcolare una base di $U^\perp$ (rispetto a β_A) e stabilire se è vero che $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$.

Esercizio 3. Sia π la rotazione di $\mathbb{R}^3$ in senso antiorario di un angolo di $\frac{\pi}{4}$ intorno alla retta r passante per $O = (0, 0, 0)$ di direzione $(1, 1, -1)^T$. Scrivere la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Scrivere, inoltre, equazioni cartesiane per la retta r .

Esercizio 4. Costruire, se possibile, una funzione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che:

$$f(1, 1, 0) = (0, 1), \quad f(2, 0, 0) = (2, 2), \quad f(1, -1, 0) = (2, 1).$$

Calcolare la controimmagine del vettore $(1, 1)$ mediante la funzione f costruita.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{Q}$, siano $U, W \subset V$ due sottospazi, di dimensione m e p rispettivamente, tali che $V = U \oplus W$. Siano $\pi_U, \pi_W \in \text{End}(V)$ le proiezioni su U e W associate alla scomposizione in somma diretta. Sia F l'endomorfismo $F = \pi_U - \pi_W$.

1. Calcolare F^2 .
2. Chi sono gli autovalori e gli autovettori di F ? F è diagonalizzabile?

Esercizio 6. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A_a è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$)?
2. Considerare, per $a \in \mathbb{Q}$, la stessa matrice in $M_3(\mathbb{Q})$. Esistono valori di a per cui essa è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$?