Foglio di esercizi numero 1
Corso di Algebra Lineare e Geometria
Corso di Laurea Triennale in Astronomia

Esercizio 1. Sia $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Mostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, con la somma ed il prodotto definiti in $\mathbb{R}$, è un campo.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile x a coefficienti in $\mathbb{K}$. Mostrare che $\mathbb{K}[x]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi, non è un campo.

Esercizio 3. Considerato in $\mathbb{R}^4$ il sottoinsieme $S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x + z = 0, 3y - w = 0\}$ verificare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ costituito dalle funzioni da $[-1, 1]$ in $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni: se $f, g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + g$ e αf sono le funzioni così definite: dato $x \in [-1, 1]$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di V:

- $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$;
- $W = \{f \in V \mid f(-1) = -1\}$;
- $R = \{f \in V \mid f(x) = 0 \text{ se } x < 0\}$;
- $S = \{f \in V \mid f(x) \leq f(y) \text{ se } x \leq y\}$;
- $T = \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \forall\, x \in [-1, 1]\}$.

Esercizio 5. Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto alla somma ma non al prodotto per scalari ed un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non alla somma.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Stabilire se l'insieme

$$S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \mid xy = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^2$.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a due. Stabilire se l'insieme $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(1) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

Esercizio 8. Un sottoinsieme di $M_2(\mathbb{Q})$ costituito da un numero finito di elementi può essere un sottospazio di $M_2(\mathbb{Q})$?