Foglio di esercizi numero 10
Corso di Algebra Lineare e Geometria
Corso di Laurea in Astronomia

Esercizio 1. Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e sia β la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice B rispetto alla base canonica. Determinare una base che diagonalizzi β. Calcolare la segnatura di β.

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard e sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 2, 0)^T$ e $v_2 = (0, 2, 1)^T$. Si consideri la decomposizione $\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp$ e la corrispondente proiezione $\pi_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ su V. Scrivere la matrice di π_V rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia β una forma bilineare simmetrica non degenere su uno spazio vettoriale V (di dimensione finita) e sia U un sottospazio di V. Mostrare che $(U^\perp)^\perp = U$.

Esercizio 4. Si consideri la forma bilineare β su $\mathbb{R}^3$ definita rispetto alla base canonica dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a β e determinare la matrice di β rispetto a $\mathcal{B}$. Calcolare la segnatura di β.

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice invertibile H tale che $H^T AH$ sia della forma prescritta dal Teorema di Sylvester.

Esercizio 6. Il prodotto di due matrici reali simmetriche è una matrice simmetrica?