Foglio di esercizi numero 11
Corso di Algebra Lineare e Geometria
Corso di Laurea in Astronomia

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

e sia β_A la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice A rispetto alla base canonica.

a) Stabilire se A è ortogonalmente diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

b) Verificare che $\mathcal{B}$ è ortogonale rispetto a β_A.

c) Calcolare la matrice di β_A rispetto alla base $\mathcal{B}$.

d) Determinare una base del radicale di β_A e stabilire se la forma è non degenere.

Esercizio 2. Descrivere geometricamente l'isometria di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

rispetto alla base canonica.

Esercizio 3. Costruire, se possibile, una matrice simmetrica avente i sottospazi $U = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $V = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ come autospazi relativi, rispettivamente, agli autovalori 0 e 1.

Esercizio 4. Costruire, se possibile, una matrice simmetrica avente i sottospazi $U = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $V = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ come autospazi relativi, rispettivamente, agli autovalori 0 e 1.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$. Sia $s : V \to V$ definita come segue: dato $v \in V$ della forma $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$, $s(u + w) = u - w$.

1. Mostrare che s è lineare;
2. mostrare che s è iniettiva;
3. mostrare che s è suriettiva;
4. stabilire se s è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Si consideri $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard. Siano $S_1 = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y + z = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y = 0\}$. Siano p_{S_1} e p_{S_2}, rispettivamente, le proiezioni su S_1 e S_2 rispetto alle decomposizioni $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_1^{\perp}$ e $\mathbb{R}^4 = S_2 \oplus S_2^{\perp}$.

1) Determinare una base del sottospazio $W = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = 0\}$.

2) Determinare tutti i vettori $z \in \mathbb{R}^4$ tali che $p_{S_1}(p_{S_2}(z)) = z$.

Esercizio 7. Stabilire se tra le seguenti matrici in $M_3(\mathbb{R})$ ci sono coppie di matrici congruenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$