

Foglio di esercizi numero 12
Corso di Algebra Lineare e Geometria
Corso di Laurea in Astronomia

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (-1, -1, -1)$, $D = (-1, 1, -1)$.

1. Verificare che i punti A, B, C, D sono complanari e scrivere un'equazione cartesiana del piano π che li contiene.
2. Verificare che i punti A, B, C, D sono i vertici di un rettangolo R e calcolare l'area di R .

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $O = (0, 0, 0)$.

1. Verificare che $\|A - O\| = \|B - O\| = \|B - A\|$.
2. Calcolare l'area del triangolo equilatero di vertici O, A e B .

Esercizio 3. Determinare, se possibile, equazioni cartesiane di una retta t parallela al vettore $v = (-1, 2, 0)$ e incidente le due rette

$$r : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e ortogonale e incidente la retta

$$s : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4y - z = 6 \end{cases} \quad s_\beta : \begin{cases} 2x + z = 2\beta + 12 \\ 2y - \beta z = 2 \end{cases}$$

1. Determinare la distanza tra la retta r e il punto $P = (0, 1, 1)$.
2. Stabilire per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ le due rette r e s_β sono sghembe.

3. Per $\beta = 0$, determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente entrambe le rette r e s_0 .
4. Determinare i valori $\bar{\beta}$ del parametro per cui r e $s_{\bar{\beta}}$ sono perpendicolari.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo tridimensionale siano dati il punto $A = (1, 1, 1)$, il piano $\pi : x + y + 2z = 0$ e il vettore $v = (0, 1, 1)$. Si determini la retta r che passa per A , parallela a π ed ortogonale a v . Per ciascun punto P dell'asse delle x si calcoli la distanza δ di P da r . Esistono punti dell'asse delle x che hanno distanza $\delta = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ da r ? Quali? Vi sono punti dell'asse delle x che hanno distanza da r minore di $\sqrt{2}$?