Foglio di esercizi numero 3
Corso di Algebra Lineare e Geometria
Corso di Laurea in Astronomia

1. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0\}.$$

   a) Verificare che W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.
   b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W.
   c) Completare $\mathcal{B}$ ad una base di $M_2(\mathbb{R})$ in due modi diversi.
   d) Esibire un insieme di generatori di W che non sia una base di W.

2. Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{(1, t), (-t, -1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Calcolare le coordinate del vettore $(2, 1)$ rispetto alla base corrispondente ad uno dei valori trovati.

3. Sia $V = \mathbb{K}_{\leq 3}[x]$. È possibile trovare una base di V costituita da polinomi $p(x)$ tali che $p(1) = 0$?

4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Mostrare che n vettori linearmente indipendenti di V individuano una base.

5. Sia $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \mid p(0) = 0, p(-1) = 0\}$ e sia $T = Span\{1 + x, 1 - x^2\}$. Determinare una base di $S \cap T$ e completarla in una base di $S + T$.

6. Dimostrare che gli insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

   sono basi di $\mathbb{R}^2$. Determinare le coordinate dei vettori $(1, 3)$, $(2, -1)$ rispetto a tali basi. Quali sono le coordinate del vettore $(0, 1)_{\mathcal{B}_1}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_2$?