Foglio di esercizi numero 4
Algebra Lineare e Geometria
Corso di Laurea Triennale in Astronomia

(ATTENZIONE: in questo foglio di esercizi tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ sono scritti in riga anziché in colonna)

Esercizio 1. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito nel modo seguente:

$$f(x, y, z, w) = (w, x + y, x + z, w).$$

Determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = T \oplus \ker f$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da: $f(x, y, z, w) = (x + z, 3z - w, y)$. Verificare che f è lineare e determinare $\ker f$, Imf e le loro dimensioni.

Esercizio 3. Esiste una applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(0, 1) = (2, 4)$, $\varphi(1, 1) = (1, 5)$? È unica? In caso di risposta affermativa determinare nucleo e immagine di φ.

Esercizio 4. Si consideri la seguente applicazione f_s di $\mathbb{R}^3$ in se stesso:

$$f_s(x, y, z) = (x + y + z, x - y + s, sx + (s - 1)z).$$

1. Per quali valori di s l'applicazione f_s è lineare?
2. Per i valori di s trovati al punto 1.:
   a) Determinare $\ker f_s$, $\mathrm{Im} f_s$.
   b) Esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}L$=$\mathrm{Im}f_s$? In caso affermativo costruire L.
   c) Esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker T$=$\mathrm{Im}f_s$? In caso affermativo costruire T.

Esercizio 5. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0, \quad x - y = 0\},\ U_2 = Span\{(-1, 1, 1)\}.$$

1. Determinare $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ e stabilire se la somma di U_1 ed U_2 è diretta.
2. Esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia U_1 come nucleo ed U_2 come immagine? In caso affermativo costruire L.
3. Esiste una applicazione lineare iniettiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia U_2 come immagine? In caso affermativo costruire T.
4. Esiste una applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ che abbia U_1 come nucleo? In caso affermativo costruire f.

Esercizio 6. 1) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $f(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $f(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.
2) Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $g(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $g(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $g(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.
3) Esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $h(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $h(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $h(0, 0, 1) = (1/2, -1/2, 1/2)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.

Esercizio 7. Si costruisca, se possibile, un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che: $kerL = Span\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ e $ImL = Span\{(1,1)\}$.

Esercizio 8. Sia $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(x, y) = (x + y, x - y, y).$$

1. Si determini $KerT$: se ne individui una base e se ne calcoli la dimensione. L'applicazione T è iniettiva?

2. Si determini ImT: se ne individui una base e se ne calcoli la dimensione. L'applicazione T è suriettiva?

3. Si costruisca, se possibile, un'applicazione lineare $S \neq T$, $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $KerS = KerT$ e $ImS = ImT$.

Esercizio 9. Sia $T : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ l'applicazione definita da:

$$T(p(x)) = xp'(x)$$

dove $p'(x)$ indica la derivata prima del polinomio $p(x)$.

1. Mostrare che T è lineare.

2. Determinare nucleo e immagine di T.

3. Determinare i polinomi p tali che $T(p) = p$.

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $V = V_1 \oplus V_2$. Sia

$$\pi_{V_1}^{V_2} : V \to V$$

l'applicazione che ad ogni vettore v di V associa la sua componente lungo V_1: se $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, $\pi_{V_1}^{V_2}(v) = v_1$. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $V_1 = Span\{(1,0,1),(0,1,0)\}$. Determinare due sottospazi distinti V_2, V_3 di $\mathbb{R}^3$ tali che $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ e $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_3$. Calcolare $\pi_{V_1}^{V_2}(1,0,2)$ e $\pi_{V_1}^{V_3}(1,0,2)$. I vettori trovati coincidono?