Foglio di esercizi numero 5
Algebra Lineare e Geometria
Corso di Laurea Triennale in Astronomia

(ATTENZIONE: in questo foglio di esercizi tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ sono scritti in riga anziché in colonna)

Esercizio 1. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & -4 \\ 15 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice A.

Esercizio 2. Siano V e V' due spazi vettoriali, di dimensione rispettivamente due e tre, e siano $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base di V e $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base di V'. Sia poi $f : V \to V'$ l'applicazione lineare tale che $f(v_1) = u_1 - 2u_2 + u_3$, $f(v_2) = u_3 - 2u_1$. Determinare la matrice A associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e determinare le componenti rispetto a $\mathcal{B}'$ del vettore $f(v)$ dove $v = -\frac{1}{2}v_1 + v_2$.

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare $\ker f$, $Im f$ e le loro dimensioni, esibendo una base di tali sottospazi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $f(x, y) = (x + 3y, y, x + 3y)$.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare $\ker f$ e $Im f$.

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori $v_1 = (2, t, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, t)$ dove t è un parametro reale. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$f(e_1) = v_1, \quad f(e_2) = v_2, \quad f(e_3) = v_3$$

essendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1. Esistono valori del parametro t per i quali l'applicazione f è invertibile?
2. Si ponga $t = -1 + \sqrt{3}$.
   a) Si determinino una base di $\ker f$ ed una base di $Im f$.
   b) Si scriva una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Im\, g = \ker f$ e si determini $f \circ g$.
   c) Si scriva una applicazione lineare $h : \mathbb{R}^2 \to R^3$ tale che $Im\, h = Im f$ e si determini $f \circ h$.