

Foglio di esercizi numero 8
Corso di Algebra Lineare e Geometria
Corso di Laurea in Astronomia

Esercizio 1. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, -1, -1)$, $f(0, 1, -1) = (0, -1, 1)$.

1. Stabilire se l'endomorfismo f è invertibile.
2. Calcolare gli autovalori di f .
3. Stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
4. Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.
5. Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio definito da

$$V := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

1. Dimostrare che $f_A(V) \subset V$ e quindi è possibile definire un'applicazione lineare

$$f : V \rightarrow V$$

$$v \mapsto f_A(v).$$

2. Sia $\mathcal{B}$ la base di V data da $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$. Determinare la matrice F associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$.
3. Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire se i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A .
2. Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

Esercizio 4. Sia $f : V \rightarrow W$ una funzione lineare. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false (fornendo una opportuna motivazione):

- a) Se f è iniettiva allora per ogni $w \in W$, $f^{-1}(w)$ contiene un solo elemento di V ;
- b) se $w \in \text{Im} f$ e $f^{-1}(w)$ contiene un solo elemento, allora f è iniettiva;
- c) se f è suriettiva allora per ogni $w \in W$, $f^{-1}(w)$ contiene un solo elemento di V .

Esercizio 5. Sia $S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false (fornendo una opportuna motivazione):

- a) S è vuoto;
- b) S è il sottospazio banale di $M_3(\mathbb{R})$;
- c) tutte le matrici di S hanno rango minore o uguale a due.

Esercizio 6. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false (fornendo una opportuna motivazione):

- a) Esistono due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che A sia la matrice associata all'applicazione lineare identica $id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rispetto a tali basi (fissate rispettivamente nel dominio e nel codominio di id);
- b) se A è la matrice di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ rispetto ad una base di $\mathbb{R}^2$, allora f è iniettivo.

Esercizio 7. Siano $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y, z = t\}$ e $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$.

- a) Determinare, se possibile, un endomorfismo h di $\mathbb{R}^4$ tale che $\ker h = S$, $\operatorname{Im} h \subset T$ e $\ker h \oplus \operatorname{Im} h = \mathbb{R}^4$.
- b) Determinare, se possibile, un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $\ker f \subset T$, $\operatorname{Im} f = S$ e $f \circ f = 0$. Quanti siffatti endomorfismi esistono?