

Foglio di esercizi numero 9
Corso di Algebra Lineare e Geometria
Corso di Laurea in Astronomia

Esercizio 1. Determinare una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

e calcolare A^k per ogni intero $k \geq 1$.

Esercizio 2.

- a) Si costruisca un endomorfismo f di $\mathbb{K}^3$ tale che: $Im(f) = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{K}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ e $\ker(f) = Span\{(1, 1, 1)^T\}$.
- b) Esiste un unico endomorfismo soddisfacente le condizioni del punto a)?
- c) Stabilire se esistono una base $\mathcal{B}$ ed una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{K}^3$ rispetto alle quali la matrice associata ad f sia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- d) Stabilire se esiste una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{K}^3$ rispetto alla quale la matrice associata ad f sia M .

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se esiste una matrice invertibile $M \in M_2(\mathbb{Q})$ tale che $M^T A M = B$.

Esercizio 4. Sia β la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ definita da:

$$\beta((x, y, z)^T, (x', y', z')^T) = 3xx' + 2yy' + 6zz' - 2xy' - 2yx'.$$

- a) Verificare che β definisce su $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare;
- b) stabilire se i sottospazi $U_1 = span\{(1, 0, 0)^T\}$ e $U_2 = span\{(0, 1, 0)^T\}$ sono ortogonali tra loro;

c) determinare il sottospazio ortogonale ad U_1 rispetto a β .

d) Calcolare la norma di $(1, 1, 1)^T$ rispetto a β .

Esercizio 5. Costruire una forma bilineare non degenera su $\mathbb{R}^2$ la cui restrizione ad un sottospazio non banale U di $\mathbb{R}^2$ sia degenera.

Esercizio 6. Esibire due matrici che pur avendo entrambe determinante uguale a 0 non sono congruenti.

Esercizio 7. Al variare di $a \in \mathbb{R}$, stabilire se la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(rispetto alla base canonica) è degenera. Per quali valori di a esistono vettori isotropi?