Corso di Laurea in Informatica per il Management
Corso di ALGEBRA LINEARE. Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Bologna 13 luglio 2012 - III appello

Risolvere i seguenti esercizi motivando ogni risposta:

Esercizio 1. (9 punti) Si considerino i seguenti sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle \quad V = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a-b-c+d=0\ ;\ c+d=0 \}.$$

1. Determinare una base e la dimensione di V;
2. determinare una base e la dimensione di $U \cap V$;
3. completare la base trovata di $U \cap V$ in una base di U e in una base di V.

Esercizio 2. (11 punti) Dato il sistema lineare Σ nelle incognite (x, y, z),

$$\Sigma : \begin{cases} x+2y+z &= 2 \\ x+y+2z &= 2 \\ 3y-3z &= 0 \end{cases},$$

1. determinare le soluzioni del sistema Σ;
2. determinare gli eventuali valori reali di t per cui il sistema Σ risulta equivalente al sistema $\Sigma_t : \begin{cases} x+3y &= 1+t^2 \\ y-tz &= t-1 \end{cases}$ (cioè tali che Σ e Σ_t abbiano le stesse soluzioni);
3. per quali valori del parametro t il sistema dato dalle equazioni di Σ e di Σ_t ammette soluzioni?

3. (10 punti) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x, y, z) = (x+y-z, x+z, 2x+y).$$

1. Determinare una base di $\ker f$ ed una base di Imf;
2. determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio);
3. stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile;
4. determinare, se possibile, una funzione lineare non nulla $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g \circ f = 0$.