Corso di Laurea in Informatica per il Management
Corso di ALGEBRA LINEARE. Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Bologna 27 giugno 2012 - Svolgimento del II appello

Esercizio 1. (10 punti) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \langle (1,1,1), (-2,-2,1), (3,3,1) \rangle, \quad T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}.$$

(a) Determinare una base di S e una base di T e calcolare le dimensioni dei due sottospazi;

(b) determinare una base $\mathcal{B}$ di $S \cap T$;

(c) completare $\mathcal{B}$ in una base di S e in una base di T;

(d) stabilire se il vettore $v = (1,0,0)$ si può scrivere come somma di un vettore di S e di uno di T. Tale scrittura è unica?

Svolgimento.

(a) Si ha:

$$\dim(S) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Il sottospazio S è generato dalle righe della matrice di partenza e quindi dalle righe della matrice ridotta in forma a scala, perciò una base di S è: $\{(1,1,1), (0,0,1)\}$.

Abbiamo inoltre: $T = \{(x,-x,z) \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$. Essendo i vettori $(1,-1,0)$ e $(0,0,1)$ linearmente indipendenti (poiché non sono uno multiplo dell'altro), T ha dimensione 2 e $\{(1,-1,0), (0,0,1)\}$ è una base di T.

(b) Per determinare una base di $S \cap T$ dobbiamo determinare i vettori di S, cioè i vettori della forma $a(1,1,1) + b(0,0,1) = (a,a,a+b)$, che appartengono anche a T, cioè soddisfacenti l'equazione di T: $x+y=0$. Otteniamo così la condizione $a+a=0$, pertanto $S \cap T = \{(0,0,b)\}$. Una base di $S \cap T$ è dunque $\mathcal{B} = \{(0,0,1)\}$.

(c) Le basi di S e T precedentemente individuate: $\{((1,1,1), (0,0,1)\}$ e $\{(1,-1,0), (0,0,1)\}$, contengono $(0,0,1)$ perciò soddisfano la condizione richiesta.

(d) Ogni vettore di S è della forma $(a,a,a+b)$ con $a,b \in \mathbb{R}$, ed ogni vettore di T è della forma $(c,-c,d)$ con $c,d \in \mathbb{R}$. Si tratta dunque di determinare $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, tali che $(1,0,0) = (a,a,a+b) + (c,-c,d)$. Ad esempio possiamo prendere $a = 1/2$, $c = 1/2$, $b = -1/2$, $d = 0$, oppure $a = 1/2$, $c = 1/2$, $b = 0$, $d = -1/2$. La scrittura richiesta non è pertanto unica.

Esercizio 2. (10 punti)

(a) Risolvere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + (3k+1)y + (2k+1)z = 5k+2 \\ (3k)y + (4+k)z = 4+4k \end{cases}$$

(b) Stabilire se esistono dei vettori $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che siano soluzioni di Σ_k per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento.

(a) La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3k+1 & 2k+1 & 5k+2 \\ 0 & 3k & 4+k & 4+4k \end{array}\right).$$

Riduciamo la matrice in forma a scala per righe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3k & 2k+1 & 5k+1 \\ 0 & 3k & 4+k & 4+4k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3k & 2k+1 & 5k+1 \\ 0 & 0 & -k+3 & -k+3 \end{array}\right).$$

Per ogni $k \neq 0, 3$, $rg(A) = 3 = (rg(A|b)$. Per il Teorema di Rouché Capelli il sistema ammette una sola soluzione v che determiniamo per sostituzioni successive dal basso: $v = (0, 1, 1)$.

Se $k = 3$ la matrice completa associata al sistema diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si ha: $rg(A) = 2 = rg(A|b)$, pertanto il sistema ammette infinite soluzioni della forma $v + \ker A$. Abbiamo $\ker A = \langle(-7, 7, -9)\rangle$ e possiamo scegliere $v = (0, 1, 1)$.

Infine, se $k = 0$, otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

che può essere ulteriormente ridotta in forma a scala:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In tal caso $rg(A) = rg(A|b) = 2$, pertanto il sistema ammette infinite soluzioni della forma $v + \ker A$. Abbiamo $\ker A = \langle(1, -1, 0)\rangle$ e possiamo scegliere $v = (0, 1, 1)$.

(b) Per $k \neq 0, 3$ il sistema ha l'unica soluzione $(0, 1, 1)$ che è soluzione del sistema anche per $k = 0$ e $k = 3$.

Esercizio 3. (10 punti) Sia $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2)\}$.

(a) Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Verificare che esiste un unico endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(0, 1, 0) = (0, -1, 0), \quad f(1, 1, 1) = (1, 1, 1), \quad f(1, 1, 2) = (1, 1, 2).$$

(c) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel codominio).

(d) Determinare autovalori e autovettori di f e stabilire se f è diagonalizzabile.

(e) Stabilire se l'endomorfismo f è iniettivo e/o suriettivo.

Svolgimento.

(a) Per verificare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ basta osservare che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -(2-1) = -1 \neq 0.$$

(b) Essendo f definito su una base di $\mathbb{R}^3$ esso esiste ed è unico.

(c) Per determinare la matrice richiesta dobbiamo determinare le immagini mediante f dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo: $f(0,1,0) = (0,-1,0)$. Inoltre $(0,0,1) = (1,1,2)-(1,1,1)$, perciò $f(0,0,1) = f(1,1,2) - f(1,1,1) = (1,1,2) - (1,1,1) = (0,0,1)$. Infine: $(1,0,0) = 2(1,1,1) - (1,1,2) - (0,1,0)$, perciò $f(1,0,0) = 2f(1,1,1) - f(1,1,2) - f(0,1,0) = (2,2,2) - (1,1,2) - (0,-1,0) = (1,2,0)$. La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è dunque:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Il vettore $(0,1,0)$ è autovettore di f relativo all'autovalore -1 e i vettori $(1,1,1)$ e $(1,1,2)$ sono autovettori relativi all'autovalore -1. Dunque -1 e 1 sono gli autovalori di f e $\mathcal{B}$ è una base di autovettori. Di conseguenza f è diagonalizzabile.

(e) La matrice determinata al punto (c) ha rango massimo perciò l'endomorfismo f è suriettivo e iniettivo.