Corso di Laurea in Informatica per il Management
Corso di ALGEBRA LINEARE. Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Bologna 25 maggio 2012 - Svolgimento I appello

Esercizio 1. (10 punti) Dato il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \langle (1,1,1), (1,2,2), (1,3,3) \rangle,$$

(a) calcolare la dimensione di W e determinare una sua base $\mathcal{B}$;

(b) completare $\mathcal{B}$ in una base di $\mathbb{R}^3$;

(c) stabilire se il vettore $v = (1,0,0)$ appartiene a W e, in caso affermativo, determinare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$;

(d) determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $\dim(W \cap T) = 1$;

(e) è possibile descrivere W come insieme di soluzioni di un'equazione lineare? In caso affermativo si scriva una equazione lineare che abbia W come insieme di soluzioni.

Svolgimento. (a) Si ha: $\dim W = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$
Una base di W è dunque $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (0,1,1)\}$.

(b) Per completare $\mathcal{B}$ in una base di $\mathbb{R}^3$ basta aggiungere un vettore linearmente indipendente dai vettori della base $\mathcal{B}$, ad esempio il vettore $(0,0,1)$. Si ha, infatti: $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$

(c) Poiché $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1)$, $(1,0,0)$ appartiene a W e le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1,-1)_{\mathcal{B}}$.

(d) Un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 che abbia intersezione di dimensione 1 con W è un qualsiasi sottospazio di dimensione 2 diverso da W, ad esempio $T = \langle (0,1,1), (0,0,1) \rangle$.

(e) È possibile descrivere W come insieme di soluzioni di un sistema lineare di rango 1 (cioè di una equazione lineare) in tre variabili dal momento che $\dim W = 2$. Osserviamo che i vettori della base $\mathcal{B}$ hanno seconda e terza coordinata uguali, perciò tutti (e soli) i vettori di W soddisfano l'equazione $y = z$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il seguente sistema lineare Σ_k nelle incognite x, y, z dipendente dal parametro reale k:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + kz = 1 - k \\ kx + (4-k)y + kz = 1 \end{cases}$$

(a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare Σ_k ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

(b) Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_k interpretato ora come sistema lineare nelle 4 incognite x, y, z, t.

Svolgimento. (a) La matrice completa associata al sistema Σ_k è:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 1-k \\ k & 4-k & k & 1 \end{array}\right)$$

Riduciamo la matrice $(A|\mathbf{b})$ in forma a scala per righe:

$$(A|\mathbf{b}) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 4-2k & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4-2k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \end{array}\right)$$

Si ha, dunque:
- per ogni $k \neq 2, 1$, $rgA = rg(A|\mathbf{b}) = 3$: il sistema ha in questo caso una soluzione che possiamo trovare risolvendo il sistema lineare associato alla matrice ridotta in forma a scala, vale a dire il sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ (4-2k)y = 1 \\ (k-1)z = 1-k \end{cases}$$

Procedendo per sostituzioni successive dal basso otteniamo l'unica soluzione $(\frac{3-2k}{4-2k}, \frac{1}{4-2k}, -1)$;
- se $k = 2$, $rgA = 2 < rg(A|\mathbf{b}) = 3$. Per il Teorema di Rouché Capelli il sistema non ha soluzioni;
- se $k = 1$, $rgA = 2 = rg(A|\mathbf{b})$. Per il Teorema di Rouché Capelli il sistema ha infinite soluzioni della forma $v + \ker A$, essendo v una soluzione particolare del sistema. Anche in questo caso possiamo trovare le soluzioni del sistema risolvendo il sistema lineare associato alla matrice ridotta in forma a scala, vale a dire il sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

Una soluzione particolare del sistema, in tal caso, è $v = (-1/2, 1/2, 0)$ e $\ker A = \langle(1,0,-1)\rangle$. Dunque l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_k per $k = 1$ è: $(-1/2, 1/2, 0) + \langle(1,0,-1)\rangle$.

(b) Se interpretiamo Σ_k come un sistema lineare nelle variabili x, y, z, t, la matrice completa associata al sistema diventa:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 & 1-k \\ k & 4-k & k & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La colonna di zeri non influisce sulla riduzione in forma a scala, perciò la matrice ridotta in forma a scala risulta:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-2k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & 1-k \end{array}\right)$$

Si ha, dunque:
- per ogni $k \neq 2, 1$, $rgA = rg(A|\mathbf{b}) = 3$: essendo il numero di variabili, in questo caso, uguale a 4, il sistema ha infinite soluzioni che possiamo trovare utilizzando quanto già calcolato rispondendo alla domanda (a) e considerando il fatto che la variabile t è una variabile libera. L'insieme di soluzioni del sistema è dunque: $(\frac{3-2k}{4-2k}, \frac{1}{4-2k}, -1, 0) + \langle(0,0,0,1)\rangle$;
- se $k = 2$, $rgA = 2 < rg(A|\mathbf{b}) = 3$. Per il Teorema di Rouchè Capelli il sistema non ha soluzioni;
- se $k = 1$, $rgA = 2 = rg(A|\mathbf{b})$. Per il Teorema di Rouchè Capelli il sistema ha infinite soluzioni della forma $v + \ker A$, essendo v una soluzione particolare del sistema. Anche in questo caso possiamo trovare le soluzioni del sistema ricorrendo a quanto già calcolato precedentemente: l'insieme delle soluzioni è: $(-1/2, 1/2, 0, 0) + \langle(1,0,-1,0), (0,0,0,1)\rangle$.

Esercizio 3. (10 punti) Al variare del parametro reale s sia

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice dell'applicazione lineare $f_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio di f_s).

(a) Stabilire per quali valori di s la funzione f_s è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Determinare una base di $\ker f_s$ ed una base di Imf_s al variare di $s \in \mathbb{R}$.

(c) Stabilire per quali valori di s il vettore $(1, 0, 0)$ è autovettore di f_s.

(d) Stabilire per quali valori di s 0 è autovalore di A_s.

(e) Per ognuno dei valori di s trovati in (c) e (d), stabilire se la matrice A_s è diagonalizzabile.

Svolgimento. (a) Essendo f_s un endomorfismo esso è suriettivo se e solo se è iniettivo quindi se e solo se è invertibile. Si tratta allora di stabilire per quali valori del parametro s la matrice A_s ha determinante non nullo. Dal momento che $\det(A_s) = -1 - s$, f_s è iniettiva e suriettiva per ogni $s \neq -1$. Per $s = -1$ la funzione f_s non è né iniettiva né suriettiva.
(b) Per ogni $s \neq -1$, $\ker f_s = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e $Imf_s = \mathbb{R}^3$ perciò una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$ (ad esempio la base canonica) è una base di Imf_s. Per $s = -1$:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\dim(Imf_{-1}) = rgA_{-1} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$. L'immagine della funzione f_{-1} è generata dalle colonne della matrice A_{-1}, dunque per determinare una base di Imf_{-1} basterà scegliere due colonne linearmente indipendenti della matrice A_{-1}, ad esempio, $\{(1, 0, -1), (-1, -1, 0)\}$. Per il Teorema delle dimensioni, $\dim(\ker f_{-1}) = 3 - \dim(Imf_{-1}) = 1$. Per determinare una base di $\ker f_{-1}$ possiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice ridotta in forma a scala che abbiamo individuato: $\begin{cases} x - y = 0 \\ -y + z = 0. \end{cases}$ Una base di $\ker f_{-1}$ è dunque $\{(1, 1, 1)\}$.
(c) Il vettore $(1, 0, 0)$ è autovettore di f_s se e solo se $f_s(1, 0, 0) = \lambda(1, 0, 0)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Dal momento che $f_s(1, 0, 0) = (1, 0, s)$, $(1, 0, 0)$ è autovettore di f_s se e solo se $s = 0$.
(d) 0 è autovalore di f_s se e solo se f_s non è invertibile, cioè, in base a quanto già osservato, se e solo se $s = -1$.
(e) Per $s = 0$ la matrice A_s diventa:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di questa matrice sono -1, di molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1, ed 1 di molteplicità algebrica 2. Calcoliamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 1: $\dim V_1 = 3 - rg(A_0 - I_3) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$. Dal momento che la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore 1 non coincidono, la matrice A_0 non è diagonalizzabile.
Sia ora $s = -1$. Abbiamo:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice A_{-1}:

$$p_{A_{-1}}(\lambda) = \det(A_{-1} - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) + 1 = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 1).$$

Gli autovalori della matrice A_{-1} sono dunque: 0, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. La matrice A_{-1} è pertanto diagonalizzabile poiché ha 3 autovalori distinti.