Corso di Laurea in Informatica per il Management
Corso di ALGEBRA LINEARE. Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Bologna 4 aprile 2012 - Svolgimento della prova parziale simulata

1. (11 punti) Sia $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0,\ y + z - t = 0\}$.

(a) Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(b) Determinare una base di S ed un insieme di generatori di S che non sia una base di S.

(c) Sia $L = \{(5a, 2a, -3a, -a) \in \mathbb{R}^4\}$. Determinare una base $\mathcal{B}$ di $L \cap S$ e completare $\mathcal{B}$ in una base di S.

(d) Stabilire se $L \cup S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento. (a) Usiamo le equazioni che definiscono S per esprimere due delle 4 variabili x, y, z, t rispetto alle altre due. Abbiamo, ad esempio, $x = y - z$ e $t = y + z$. Dunque $S = \{(y - z, y, z, y + z) \in \mathbb{R}^4\} = \langle(1, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 1)\rangle$. S è perciò un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ poiché è l'insieme di tutte e sole le combinazioni lineari dei vettori $(1, 1, 0, 1)$ e $(-1, 0, 1, 1)$.
(b) Rispondendo alla domanda precedente abbiamo mostrato che i vettori $(1, 1, 0, 1)$ e $(-1, 0, 1, 1)$ generano S. Tali vettori sono anche linearmente indipendenti poiché non sono uno multiplo dell'altro, perciò $\{(1, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 1)\}$ è una base di S. Per ottenere un insieme di generatori di S che non sia una base di S basta aggiungere ai vettori $(1, 1, 0, 1)$ e $(-1, 0, 1, 1)$ un vettore linearmente dipendente da essi, ad esempio $(2, 2, 0, 2)$.
(c) Per determinare $L \cap S$ cerchiamo tra gli elementi di L, cioè tra i vettori della forma $(5a, 2a, -3a, -a)$, quelli che stanno anche in S cioè quelli che soddisfano le equazioni di S. Sostituendo gli elementi della forma $(5a, 2a, -3a, -a)$ nelle equazioni di S otteniamo: $\begin{cases} 5a - 2a - 3a = 0 \\ 2a - 3a + a = 0. \end{cases}$ Osserviamo dunque che entrambe le equazioni di S sono soddisfatte da tutti gli elementi di L, quindi $L \subset S$ e $L \cap S = L$. Una base di $L \cap S$ è dunque una base di L, ad esempio $\mathcal{B} = \{(5, 2, -3, -1)\}$. Dal momento che $\dim S = 2$, per completare $\mathcal{B}$ in una base di S basta aggiungere al vettore $v = (5, 2, -3, -1)$ un vettore w di S linearmente indipendente da v. Ad esempio $\{(5, 2, -3, -1), (1, 1, 0, 1)\}$ è una base di S.
(d) Abbiamo già osservato che $L \subset S$, pertanto $L \cup S = S$ che abbiamo già mostrato essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

2. (9 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y) = (x - y, 2x - 2y, 3x - 3y).$$

(a) Determinare nucleo e immagine di f. La funzione f è iniettiva? È suriettiva?

(b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (1, 2, 0), (1, 0, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(c) Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, stabilire se A può essere la matrice associata alla funzione f rispetto ad una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^2$ e ad una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^3$ opportunamente scelte.

Svolgimento. (a) Abbiamo: $\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y, 2x-2y, 3x-3y) = (0,0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y=0, 2x-2y=0, 3x-3y=0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y=0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y\} = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\} = \langle(1,1)\rangle$. Abbiamo dunque $\dim(\ker f) = 1$. Allora, per il Teorema delle dimensioni, $\dim(Imf) = 2-1 = 1$. Sappiamo che $Imf = \langle f(1,0), f(0,1)\rangle = \langle(1,2,3),(-1,-2,-3)\rangle = \langle(1,2,3)\rangle$. La funzione f non è iniettiva perchè il suo nucleo non è banale e non è suriettiva perché $Imf \neq \mathbb{R}^3$ (ricordiamo che, per il Teorema delle dimensioni, nessuna funzione lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ può essere suriettiva).
(b) La matrice richiesta è una matrice 3×2 che ha sulle colonne le immagini dei vettori $(1,0)$ e $(0,1)$ scritte in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Abbiamo: $f(1,0) = (1,2,3) = (1,0,0)_{\mathcal{B}}$ e $f(0,1) = (-1,-2,-3) = (-1,0,0)_{\mathcal{B}}$. La matrice richiesta è dunque:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice A ha rango 2 pertanto non può essere la matrice associata alla funzione f rispetto ad alcuna base di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: sappiamo infatti che l'immagine di f ha dimensione 1.

3. (10 punti) Al variare del parametro reale s sia

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice dell'applicazione lineare $f_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio di f_s).

(a) Stabilire per quali valori di s la funzione f_s è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Determinare una base di $\ker f_s$ ed una base di Imf_s al variare di $s \in \mathbb{R}$.

(c) Stabilire per quali valori di s il vettore $(2,1,-1)$ appartiene ad Imf_s.

Svolgimento. (a) Un endomorfismo di uno spazio vettoriale è iniettivo se e solo se è suriettivo. Dobbiamo dunque stabilire per quali valori di s si ha $rgA_s = 3$. Il rango della matrice A_s è infatti la dimensione dell'immagine di f_s.

$$rgA_s = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & s & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+s \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo che per ogni $s \neq -1$, $rgA_s = 3$. In tal caso $\dim(Imf_s) = 3$, perciò $Imf_s = \mathbb{R}^3$. La funzione f_s è quindi suriettiva e, per il Teorema delle dimensioni, anche iniettiva.
(b) Abbiamo appena mostrato che per ogni $s \neq -1$, $Imf_s = \mathbb{R}^3$ e $\ker f_s = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. In tal caso una base di ImF_s è $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Se $s = -1$, invece, $rgA_{-1} = 2$, quindi $\dim(Imf_{-1}) = 2$. L'immagine di f_{-1} è generata dalle colonne della matrice A_{-1}. Di queste, solo due colonne sono linearmente indipendenti. Una base di Imf_{-1} è dunque $\{(1,0,-1),(-1,-1,0)\}$. Per il Teorema delle dimensioni, $\dim(\ker f_{-1}) = 1$. Per calcolare il nucleo di f_{-1} occorre risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice A_{-1} o, equivalentemente, alla matrice ridotta in forma a scala. Abbiamo quindi $\ker f_{-1} = \{(x,y,z) \mid x-y=0, -y+z=0\} = \{(x,x,x)\} = \langle(1,1,1)\rangle$.
(c) Per ogni $s \neq -1$, $Imf_s = \mathbb{R}^3$ pertanto certamente Imf_s contiene il vettore $(2,1,-1)$. Se $s = -1$, $Imf_{-1} = \langle(1,0,-1),(-1,-1,0)\rangle$. Notiamo che $(2,1,-1) = (1,0,-1) - (-1,-1,0)$, pertanto anche in questo caso $(2,1,-1) \in Imf_{-1}$. In conclusione $(2,1,-1) \in Imf_s$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.