Corso di Laurea in Informatica per il Management
Professoressa N. Cantarini
Algebra Lineare
Bologna 16 Gennaio 2013
V appello
Tema n.1

Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. (8 punti) Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x,y,z, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} z - y = 2 \\ x + 3y - z = 1 \\ 2z - kx = 4 - 3k \end{cases}$$

Esercizio 2. (9 punti) Si considerino i sottospazi vettoriali $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = -c \right\}$ e $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + b + c + d = 0 \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di S, una base $\mathcal{C}$ di T e calcolare la dimensione di S e T;

(b) completare, se possibile, le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$ nello stesso modo;

(c) determinare una base di $S \cap T$;

(d) data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, scrivere, se possibile, A come somma di una matrice di S e di una di T. Tale scrittura è unica?

Esercizio 3. (13 punti) Si considerino le matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare nucleo e immagine della matrice A_1.

(b) Stabilire se la matrice A_2 è invertibile.

(c) Stabilire quali tra le matrici A_1, A_2, A_3, A_4 sono diagonalizzabili. Per ognuna delle matrici trovate, determinare forma diagonale e matrice diagonalizzante.

(d) Stabilire se tra le matrici A_1, A_2, A_3, A_4 ci sono coppie di matrici simili.

ATTENZIONE: ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Qualsiasi risposta non motivata verrà ignorata.

Corso di Laurea in Informatica per il Management
Professoressa N. Cantarini
Algebra Lineare
Bologna 16 Gennaio 2013
V appello

Tema n.2

Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. (8 punti) Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x,y,z, al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ x + 3y - z = 1 \\ (2+h)z - 3hy = 4 + 2h \end{cases}$$

Esercizio 2. (9 punti) Si considerino i sottospazi vettoriali $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, b = a \right\}$ e $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, a - b + c + d = 0 \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di S, una base $\mathcal{C}$ di T e calcolare la dimensione di S e T;

(b) completare, se possibile, le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$ nello stesso modo;

(c) determinare una base di $S \cap T$;

(d) data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, scrivere, se possibile, A come somma di una matrice di S e di una di T. Tale scrittura è unica?

Esercizio 3. (13 punti) Si considerino le matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare nucleo e immagine della matrice A_1.

(b) Stabilire se la matrice A_2 è invertibile.

(c) Stabilire quali tra le matrici A_1, A_2, A_3, A_4 sono diagonalizzabili. Per ognuna delle matrici trovate, determinare forma diagonale e matrice diagonalizzante.

(d) Stabilire se tra le matrici A_1, A_2, A_3, A_4 ci sono coppie di matrici simili.

ATTENZIONE: ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Qualsiasi risposta non motivata verrà ignorata.