COMPITO

Algebra Lineare, Informatica per il Management (Morigi)

20 Dicembre 2010

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permessi telefonini, libri o appunti.

Ci sono 4 esercizi per un totale di 56 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta, siate chiari nei ragionamenti e *scrivete tutti i calcoli* necessari per rispondere alle domande, motivandoli.

In tutto il compito siano a, b, c le ultime tre cifre non nulle del proprio numero di matricola.

1	
2	
3	
4	
Totale	

Se volete il vostro voto sul sito del corso firmate la seguente dichiarazione (**in nessun caso il voto verra' comunicato via email**):

Io sottoscritto autorizzo la dott.ssa Morigi a mettere sulla pagina web del corso di Algebra Lineare il voto di questo scrtitto.

Esercizio 1 (15 punti)

a) Si dia con chiarezza la definizione di vettori linearmente indipendenti. Dati i vettori $\mathbf{v}_1 = ax^2 + bx + c, \mathbf{v}_2 = ax^2 + ax - 9$, si scrivano 2 vettori distinti che siano combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, ma non siano ne un multiplo di $\mathbf{v}_1$ ne un multiplo di $\mathbf{v}_2$.

b) Si dica se l'insieme $W = \{(x, y, z, w) | x - ay + bw = 0\} \subseteq \mathbf{R}^4$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$.
Si determinino, se possibile, 4 vettori linearmente dipendenti di Mat $_{2\times2}(\mathbf{R})$ che generano Mat $_{2\times2}(\mathbf{R})$ e 2 vettori linearmente indipedenti di Mat $_{2\times2}(\mathbf{R})$ che non appartengano alla base canonica. Motivare la risposta.

c) Si dia con chiarezza la definizione di matrice invertibile.

Esercizio 2 (14 punti)
a) Sia $\mathbf{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 3 a coefficienti in $\mathbf{R}$ e siano $v_1 = ax^3 + bx - c, \mathbf{v}_2 = 2ax^3 + bx, \mathbf{v}_3 = 3ax^3 + bx + k^2c \in \mathbf{R}_3[x]$. Si stabilisca per quali valori di k i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti (si motivi il perche' dei calcoli fatti).

b) Posto $k = 1$, si determini una base di Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e la si completi ad una base di $\mathbf{R}_3[x]$.

c) Si determini, se possibile, una applicazione lineare non nulla $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tale che $\mathbf{e}_2$ appartenga a Ker F.

Esercizio 3 (11 punti)
a) Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da:

$$F(x, y, z) = (ax + ky + bz, 2ax + 4by + kz).$$

Si determini per quali valori di k si ha che F è suriettiva e per quali valori di k il vettore $(-3b, a, 2a)$ appartiene a Ker (F). Motivare le risposte.

b) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, b\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ un'altra base di $\mathbf{R}^2$. Si determini la matrice $A_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ associata a T rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^3$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

Esercizio 4 (16 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

a) si calcolino gli autovalori e gli autospazi di A.

b) si stabilisca se A è diagonalizzabile, e in caso affermativo si trovino due matrici distinte P_1 e P_2 tali che $P_1^{-1}AP_1$ e $P_2^{-1}AP_2$ sia una matrice diagonale.

c) Si stabilisca se esiste una matrice B tale che AB è la matrice identica.

CREDITO EXTRA (2 punti) Si dimostri che se $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è una applicazione lineare iniettiva e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono 3 vettori di $\mathbf{R}^3$ linearmente indipendenti, allora anche $F(\mathbf{u}), F(\mathbf{v}), F(\mathbf{w})$ sono linearmente indipendenti.