COMPITO

Algebra Lineare, Informatica per il Management (Morigi)

7 Giugno 2010

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permessi telefonini, libri o appunti.

Ci sono 4 esercizi per un totale di 56 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta, siate chiari nei ragionamenti e *scrivete tutti i calcoli* necessari per rispondere alle domande, motivandoli.

In tutto il compito siano a, b, c le ultime tre cifre non nulle del proprio numero di matricola.

1	
2	
3	
4	
Totale	

Esercizio 1 (16 punti)

a) Si dia con chiarezza la definizione di vettori linearmente dipendenti. Sia $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbf{R}$. Si determinino, se possibile, 4 vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ di $\mathbf{R}_2[x]$ che abbiano contemporaneamente le seguenti proprietà:

i) nessuno di essi è multiplo di un'altro;

ii) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ generano $\mathbf{R}_2[x]$;

ii) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ non generano $\mathbf{R}_2[x]$.

b) Si diano con chiarezza le definizioni di applicazione lineare e di matrice diagonalizzabile.

c) Si determini, se possibile, una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\mathbf{e}_2 \in \operatorname{Ker} T$. Tale T è suriettiva?

Esercizio 2 (12 punti)

a) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & 2a+2 \\ a+1 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene a Span $\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a & 2a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} ka & -2c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} kb & b \\ kb & 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) Si stabilisca se l'insieme $W = \{(x, y, z) | x+2y+z+5 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ e in caso affermativo se ne determini una base.

Esercizio 3 (16 punti)
a) Data l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da:
$T(x, y, z) = (kax + by - kcz, ax + kby - cz)$, si determini per quali valori di k si ha che T è suriettiva, motivando il procedimento seguito. Posto $k = 0$, calcolare Ker T.

b) Sia $\mathcal{B} = \{2a\mathbf{e}_1 - a\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ un'altra base di $\mathbf{R}^2$. Posto $k = 0$ si determini la matrice $A_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ associata a T rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^3$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

c) Si determinino le coordinate del vettore (b, b) rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$.

Esercizio 4 (12 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -a-1 & a+b & -a \\ -1 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

a) si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A.

b) si stabilisca se A è diagonalizzabile.

c) Si stabilisca se esiste una matrice $B \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbf{R})$ tale che $AB = I$.

CREDITO EXTRA (2 punti) Si dimostri che se A è una matrice quadrata tale che $A \cdot A = A$ e λ è un autovalore di A, allora $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$.