COMPITO

Algebra Lineare,
Informatica per il Management (Morigi)

30 Giugno 2011

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permessi telefonini, libri o appunti.

Ci sono 4 esercizi per un totale di 28 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta, siate chiari nei ragionamenti e *scrivete tutti i calcoli* necessari per rispondere alle domande, motivandoli.

In tutto il compito siano a, b, c le ultime tre cifre non nulle del proprio numero di matricola.

1	
2	
3	
4	
Totale	

Esercizio 1 (6 punti)

a) Si dica se l'insieme $W = \left\{ \begin{pmatrix} -4s & as \\ 0 & -bs \end{pmatrix} | s \in \mathbf{R} \right\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ e in caso affermativo si determini la dimensione di W.

b) Sia $\mathbf{R}_2[x]$ l'isieme dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbf{R}$. Si determinino, se possibile, 3 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}_2[x]$ che non generano $\mathbf{R}_2[x]$ e si determinino, se possibile, 4 vettori linearmente dipendenti di $\mathbf{R}_2[x]$ che generano $\mathbf{R}_2[x]$ (motivare le risposte).

c) Si dia con chiarezza la definizione di matrice invertibile.

Esercizio 2 (6 punti)
a) Si determini per quali valori di k i vettori $\{\mathbf{v}_1 = ax^2 + bx + k, \mathbf{v}_2 = ax^2 + kx + 2k, \mathbf{v}_3 = ax^2 + kx - c\}$ generano $\mathbf{R}_2[x]$. Motivare la risposta.

b) Se possibile, si determini una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\mathbf{e}_2$ sia un autovettore di T di autovalore $-a$.

Esercizio 3 (6 punti)
a) Siano $\mathbf{u} = (k, b), \mathbf{v} = (0, k - b) \in \mathbf{R}^2$ e sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita da: $F(1, 0, 0) = \mathbf{u}, F(0, 1, 0) = \mathbf{u} + \mathbf{v}, F(0, 0, 1) = c\mathbf{u}$. Si scriva la matrice A associata ad F (rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio) e si determini per quali valori di k si ha che F è suriettiva.

b) Scelto un valore di k per cui F non è suriettiva, si determini un vettore $\mathbf{w}$ di $\mathbf{R}^2$ che non appartiene all'immagine di F. Motivare la risposta.

Esercizio 4 (10 punti)

Chi ha $a = 1$ ponga $a = a + 2$. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$,

1. si stabilisca se A è diagonalizzabile e in caso affermativo si determini una matrice diagonale D simile ad A;

2. si stabilisca se A l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ associata ad A rispetto alla base canonica è un isomorfismo;

3. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}$ un'altra base di $\mathbf{R}^3$. Si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in dominio e codominio).

CREDITO EXTRA (2 punti) Siano $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ e $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ due applicazioni lineari tali che $G \circ F$ è l'identità di $\mathbf{R}^2$. Si dimostri che allora F è iniettiva.