COMPITO

Algebra Lineare, Informatica per il Management (Morigi)

22 Luglio 2009

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permessi telefonini, libri o appunti.

Ci sono 4 esercizi per un totale di 56 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta, siate chiari nei ragionamenti e *scrivete tutti i calcoli* necessari per rispondere alle domande.

In tutto il compito siano a, b, c le ultime tre cifre non nulle del proprio numero di matricola.

1	
2	
3	
4	
Totale	

Esercizio 1 (14 punti)

a) Sia V uno spazio vettoriale generico. Si dia con chiarezza la definizione di dimensione di V. Dato un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq V$, si dia con chiarezza la definizione di Span $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

b) Sia $\mathbf{R}_2[x]$ l'insieme dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbf{R}$. Si determinino, se possibile, 4 vettori non nulli di $\mathbf{R}_2[x]$ che non generino $\mathbf{R}_2[x]$. Si trovino, se possibile, due sottospazi distinti di $\mathbf{R}_2[x]$ di dimensione 2 che contengano entrambi il vettore $x^2 + x$.

c) Si dica se l'insieme $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 | x - 2y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 2 (15 punti)

a) Si stabilisca per quali valori di k i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ k & -a \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -k & -k \end{pmatrix}$ di $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ sono linearmente indipendenti (si motivi il perche' dei calcoli fatti).

b) Posto $k = 0$, si stabilisca se il vettore $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ appartiene a Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

c) Si determini, se possibile, una applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tale che Ker F abbia dimensione 2.

Esercizio 3 (14 punti)
a) Data l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da:
$T(x, y, z) = (ax - ay + kz, kx - ky + az)$,
si determini per quali valori di k si ha che T è iniettiva e per quali valori di k si ha che T è suriettiva.

c) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$ un'altra base di $\mathbf{R}^2$. Posto $k = 0$ si determini la matrice $A_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel codominio e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$ nel dominio.

Esercizio 4 (13 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a-c & 0 & -a-c \\ 0 & 2a & 0 \\ -a-c & 0 & a-c \end{pmatrix},$$

a) si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A.

b) si stabilisca se A è diagonalizzabile, e in caso affermativo si trovino due matrici distinte P_1 e P_2 tali che $P_1^{-1}AP_1$ e $P_2^{-1}AP_2$ sia una matrice diagonale.

CREDITO EXTRA (2 punti) Si dimostri che se due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti, allora anche $2\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti.