COMPITO

Algebra Lineare, Informatica per il Management (Morigi)

13 luglio 2010

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permessi telefonini, libri o appunti.

Ci sono 4 esercizi per un totale di 56 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta, siate chiari nei ragionamenti e *scrivete tutti i calcoli* necessari per rispondere alle domande, motivandoli.

In tutto il compito siano a, b, c le ultime tre cifre non nulle del proprio numero di matricola.

1	
2	
3	
4	
Totale	

Esercizio 1 (16 punti)

a) Sia $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbf{R}$. Si determinino, se possibile, 4 vettori di $\mathbf{R}_2[x]$ che non siano multiplo l'uno dell'altro e che non generino $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Si trovi una base di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(R)$ diversa dalla base canonica e si determinino le coordinate di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

b) Si dia con chiarezza la definizione di matrice invertibile e si enunci il teorema della dimensione.

c) Si determini, se possibile, una applicazione lineare in $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}\,(T) = \mathrm{Span}\,\{(a,a,a),(b,a,-b),(a+b,2a,a-b)\}$.

Esercizio 2 (15 punti)
a) Si stabilisca per quali valori di k i vettori $\{\mathbf{v}_1 = ax^2 + ax - k, \mathbf{v}_2 = bx^2 + bx + 2b, \mathbf{v}_3 = kx^2 + a\}$ generano $\mathbf{R}_2[x]$. Motivare la risposta. Scelto a piacere un valore di k si determini, se possibile, un vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{R}_2[x]$ che non appartiene a Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

b) Si stabilisca se l'insieme $W = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} | r, s, t, u \in \mathbf{R}, r + u = 0 \right\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ e in caso affermativo se ne determini una base.

Esercizio 3 (12 punti)
a) Data l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da:
$T(x, y, z) = (ax + y + kz, ky + cz, kx + z)$, si determini per quali valori di k si ha che T è iniettiva, motivando il procedimento seguito. Posto $k = -1$, si determini, se possibile, una applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $F \circ T$ sia l'identità di $\mathbf{R}^3$.

b) Posto $k = 0$ si determini, se possibile, un vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{R}^3$ che non appartiene a Im (T). Motivare la risposta.

Esercizio 4 (13 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 2a & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a) si calcolino gli autovalori e almeno un autospazio di A.

b) si stabilisca se A è diagonalizzabile.

c) Sia T l'applicazione linare associata alla matrice A rispetto alla base canonica e sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, c\mathbf{e}_3\}$ un'altra base di $\mathbf{R}^3$. Si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ in dominio e codominio.

CREDITO EXTRA (2 punti) Data l'applicazione lineare $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da $H(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, H(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, H(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$ si determini, se possibile, una applicazione lineare $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che $H \circ F$ sia l'identità di $\mathbf{R}^2$.