COMPITO

Algebra Lineare,
Informatica per il Management (Morigi)

19 Luglio 2011

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permessi telefonini, libri o appunti.

Ci sono 4 esercizi per un totale di 28 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta, siate chiari nei ragionamenti e *scrivete tutti i calcoli* necessari per rispondere alle domande, *motivandoli*.

In tutto il compito siano a, b, c le ultime tre cifre non nulle del proprio numero di matricola.

1	
2	
3	
4	
Totale	

Esercizio 1 (punti)

a) Sia $\mathbf{R}_3[x]$ l'insieme dei polinomi di grago al iù 3 a coefficienti in $\mathbf{R}$. Si dica se l'insieme $W = \{sx^3 + asx + bs\} \subseteq \mathbf{R}_3[x]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$ e in caso affermativo si determini la dimensione di W.

b) Sia V uno spazio vettoriale. Si risponda SI, NO, DIPENDE, alle seguenti domande, motivando la risposta. Nel caso in cui la risposta sia DIPENDE fornire un esempio per cascuno dei due casi che possono verificarsi.

1. Se n vettori generano V e se ne cancella uno, i rimanenti generano ancora V?

2. Se n vettori generano V e se ne aggiunge uno, i vettori ottenuti generano ancora V?

c) Si dia con chiarezza la definizione di applicazione lineare.

Esercizio 2 (punti)
a) Si determini, al variare di k, la dimensione di

$$W = \text{Span}\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} ak & 0 \\ a & ak \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ b & kb \end{pmatrix} \right\}$$

b) Scelto a piacere un valore di k non nullo, si completi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ad una base di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbf{R})$.

Esercizio 3 (punti)
a) Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:
$F(x, y, z) = (x + y + z, bx + ky + 2kz, kx + by - az)$. Si determini per quali valori di k si ha che F è iniettiva.

b) Posto $k = 0$ si determini, se possibile, una applicazione lineare $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $G \circ F$ sia l'applicazione identica.
c) Sia $\mathcal{B} = \{a\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - c\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}$ un'altra base di $\mathbf{R}^3$. Si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

Esercizio 4 (punti)

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c & -2a \\ 0 & a & 0 \\ a & -c & -2a \end{pmatrix}$,

1. Si calcolino gli autovalori e almeno un autospazio di A.
2. Si stabilisca se A è diagonalizzabile.
3. Si trovi una matrice diagonale D che non sia simile ad A (motivare la risposta)
4. Si stabilisca se A è invertibile.

CREDITO EXTRA (2 punti) Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita da: $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1, T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Determinare, se possibile, una applicazione lineare $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che $T \circ G$ sia l'identità di $\mathbf{R}^2$.