COMPITO

Algebra Lineare, Informatica per il Management (Morigi)

25 Settembre 2009

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permessi telefonini, libri o appunti.

Ci sono 4 esercizi per un totale di 56 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta, siate chiari nei ragionamenti e *scrivete tutti i calcoli* necessari per rispondere alle domande, motivandoli.

In tutto il compito siano a, b, c le ultime tre cifre non nulle del proprio numero di matricola.

1	
2	
3	
4	
Totale	

Esercizio 1 (13 punti)

a) Si diano con chiarezza la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale generico V e la definizione di rango di una applicazione lineare.

b) Sia $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbf{R}$. Si trovino, se possibile, 4 vettori linearmente dipendenti di $\mathbf{R}_2[x]$ che generino $\mathbf{R}_2[x]$ e 3 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}_2[x]$ che non generino $\mathbf{R}_2[x]$. Motivare la risposta.

c) Si dica se l'insieme $W = \left\{ \begin{pmatrix} ar & r+s \\ -0 & bs \end{pmatrix} \middle| r, s \in \mathbf{R} \right\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}_{\,2\times 2}(\mathbf{R})$.

Esercizio 2 (15 punti)
aa) Si stabilisca per quali valori di k i vettori $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 2k), \mathbf{v}_2 = (1, k, kb), \mathbf{v}_3 = (0, ck, c)$ generano $\mathbf{R}^3$.

b) Scelto a piacere un valore di k diverso da zero, si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da: $F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1,\ F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2,\ F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$. Si stabilisca se il vettore $(2, k, kb - 2k)$ appartiene all'immagine di F e se esistono vettori non nulli appartenenti a Ker F.

c) Si determini, se possibile, una applicazione lineare iniettiva $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che l'immagine di F sia Span $\{(0, 1, 0), (0, 2, a)\}$.

Esercizio 3 (13 punti)
a) Data l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita da: $T(x, y) = (x + ky, kx - [(a+b)k - ab]y, -x - ky)$ si determini per quali valori di k si ha che T è iniettiva e per quali valori di k si ha che T è suriettiva.

c) Sia $\mathcal{B} = \{-\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ un'altra base di $\mathbf{R}^3$. Posto $k = -1$ si determini la matrice $A_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel codominio e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^3$ nel dominio.

Esercizio 4 (15 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -a & a & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix},$$

a) si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A.

b) si stabilisca se A è diagonalizzabile. In caso affermativo si trovi una matrice P tale che $A' = P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale e si scriva esplicitamente A'.

CREDITO EXTRA (2 punti) Si dimostri che se $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è una applicazione lineare e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono 3 vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che $F(\mathbf{u}), F(\mathbf{v}), F(\mathbf{w})$ sono linearmente indipendenti, allora anche $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti.