Corso di Laurea in Informatica per il Management
Corso di ALGEBRA LINEARE. Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Bologna 4 aprile 2012 - Simulazione di prova parziale

Risolvere i seguenti esercizi motivando ogni risposta:

1. (11 punti) Sia $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0,\ y + z - t = 0\}$.

(a) Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(b) Determinare una base di S ed un insieme di generatori di S che non sia una base di S.

(c) Sia $L = \{(5a, 2a, -3a, -a) \in \mathbb{R}^4\}$. Determinare una base $\mathcal{B}$ di $L \cap S$ e completare $\mathcal{B}$ in una base di S.

(d) Stabilire se $L \cup S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

2. (9 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y) = (x - y, 2x - 2y, 3x - 3y).$$

(a) Determinare nucleo e immagine di f. La funzione f è iniettiva? È suriettiva?

(b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (1, 2, 0), (1, 0, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(c) Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, stabilire se A può essere la matrice associata alla funzione f rispetto ad una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^2$ e ad una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^3$ opportunamente scelte.

3. (10 punti) Al variare del parametro reale s sia

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice dell'applicazione lineare $f_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio di f_s).

(a) Stabilire per quali valori di s la funzione f_s è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Determinare una base di $\ker f_s$ ed una base di Imf_s al variare di $s \in \mathbb{R}$.

(c) Stabilire per quali valori di s il vettore $(2, 1, -1)$ appartiene ad Imf_s.