Foglio di esercizi numero 3
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Ingegneria Meccanica

Esercizio 1. Determinare per quali valori del parametro reale k il seguente sistema nelle variabili x, y, z ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x - ky + z = 1 \\ x + ky - z = 0 \\ 3x - y + z = 2. \end{cases}$$

[Soluzione: $k = 1$.]

Esercizio 2. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema:

$$\begin{cases} z + ky = 2 \\ x + y = -1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

nelle variabili x, y, z.
[Soluzione: se $k \neq -1$ una sola soluzione $(-\frac{k+2}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \frac{k+2}{k+1})$; se $k = -1$ nessuna soluzione.]

Esercizio 3. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del seguente sistema omogeneo nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} x + (k-2)y + z = 0 \\ -kx + y - z = 0 \\ x - y + kz = 0 \end{cases}$$

[Soluzione: se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ soluzione nulla; se $k = 0$ l'insieme delle soluzioni è $\langle (1, 1, 1) \rangle$; se $k = 1$ l'insieme delle soluzioni è $\langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$.]

Esercizio 4. Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x - 2y + 4z = 4 \end{cases}$$

[Soluzione: $\langle (-1, 5, 3) \rangle + (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$.]

Esercizio 5. Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Esercizio 6. Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$$

Esercizio 7. Discutere la risolubilità dei seguenti sistemi lineari nelle variabili x, y, z, al variare del parametro in $\mathbb{R}$:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ hx - hy + z = 0 \\ h^2x + h^2y + z = 0. \end{cases}$$

(ii) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x - 2y - z = k - 2 \\ x + ky + z = k + 2. \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x + hz = -h \\ -x + y + z = h \\ x + hy + hz = 1. \end{cases}$

Soluzioni: (i) Per $h = \pm 1$ il sistema non ha soluzioni; per $h = 0$ l'insieme delle soluzioni è $S = \langle(-1, 1, 0)\rangle + (1, 0, 0)$; per $h \neq \pm 1, 0$ il sistema ha l'unica soluzione $(\frac{1}{2(1-h)}, \frac{1}{2(h+1)}, \frac{h^2}{h^2-1})$. (ii) Se $k = 0$ l'insieme delle soluzioni è $T = \langle(1, 1, -1)\rangle + (2, 2, 0)$; se $k \neq 0$ il sistema ha l'unica soluzione $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}k, \frac{1}{2}, \frac{6-k}{4})$. (iii) Se $h = 0$ il sistema non ha soluzioni; se $h = -1$ l'insieme delle soluzioni è $R = \langle(1, 0, 1)\rangle + (1, 0, 0)$; se $h \neq 0, -1$ il sistema ha l'unica soluzione $(1 - h, \frac{1+h}{h}, -\frac{1}{h})$.

Esercizio 8. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determinino le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + ty + z = 1 \\ tx + y + z = t^2 \\ x + y + tz = t. \end{cases}$$

Esercizio 9. Sia S l'insieme delle soluzioni del seguente sistema nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

1. Determinare S.
2. Esiste una terna $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tale che $(a, b, c) + S$ sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? In caso affermativo determinarla.

Esercizio 10. Sia dato il sistema nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 1 \\ ax_1 + ax_2 - 2x_4 = 0 \\ ax_1 + (a - 1)x_4 = a. \end{cases}$$

Si discuta il sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 11. Sia S_t, al variare del parametro reale t, l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 6x + ty + 6z = 0 \\ tx - ty = 0 \\ tx + 2z = 0. \end{cases}$$

1. Determinare S. S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?
2. Sia $T_s = \langle(1, 1, s), (0, 0, 1)\rangle$. Stabilire se esistono valori dei parametri reali t ed s tali che $S_t \subset T_s$.