Foglio di esercizi numero 4
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Ingegneria Meccanica

Esercizio 1. Si considerino i vettori $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (3, 1, 5)$, $v_3 = (0, 2, 0)$ di $\mathbb{R}^3$.

1. Mostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$;
2. costruire la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica;
3. costruire la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 2. Sia $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Determinare la matrice A' associata all'applicazione S rispetto alle basi $\mathcal{C}_1 = \{(1, 0, 0), (1, -1, 0), (-1, -1, 1)\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{(1, 0), (2, 1)\}$.

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\{(1, 3), (3, 5)\}$.

Esercizio 4. Si considerino i vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 2)$, $w_1 = (3, 1, 0)$, $w_2 = (-1, 0, 2)$, $w_3 = (0, 2, 0)$, di $\mathbb{R}^3$.

1. Mostrare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$;
2. mostrare che esiste un'unica applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $T(v_j) = w_j$;
3. scrivere la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio;
4. scrivere la matrice di T rispetto alla base canonica.

Esercizio 5. Stabilire se le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ sono simili.

Alcuni risultati.
Esercizio 1. La matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. $A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

Esercizio 3. La matrice richiesta coincide con la matrice A.

Esercizio 4. La matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Le matrici A e B non sono simili dal momento che $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) = 0$.