Foglio di esercizi numero 5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Ingegneria Meccanica

Esercizio 1. Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se essa è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ed in caso affermativo scrivere la forma diagonale di A ed una matrice diagonalizzante.

Esercizio 2. Stabilire se le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono simili.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(a, b, c) = (0, a + 3b - 2c, 2a + 6b - 4c).$$

1. Calcolare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
2. Determinare gli autovalori di A e dire se A è diagonalizzabile; in caso affermativo trovare una matrice diagonalizzante.

Esercizio 4. Calcolare, se possibile, i valori del parametro reale t per i quali la seguente matrice A_t ammette due autovalori negativi ed uno positivo:

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t-1 \\ 0 & t-1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Stabilire se l'applicazione $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 12 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile, ed in caso affermativo determinarne l'inversa.

Esercizio 6. Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e l'operatore di derivazione $D : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ che associa ad ogni polinomio la sua derivata prima. Determinare gli autovalori di D e calcolare i relativi autospazi. Stabilire se D è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovarne la forma diagonale.

Esercizio 7. Considerato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si verifichi se esso è diagonalizzabile.

Esercizio 8. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per ciascuno dei valori trovati determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f e, quando possibile, una base ortonormale di autovettori di f.

Esercizio 9. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito nel modo seguente:

$$f(x, y, z) = (-y, -x, z).$$

Si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.

Esercizio 10. La matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile? Determinare, se possibile, una matrice H non ortogonale che diagonalizzi la matrice A ed una matrice ortogonale K che diagonalizzi A.

Esercizio 11. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la seguente applicazione:

$$f(x, y, z) = (\alpha y, y - x, z)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Stabilire per quali valori di α l'applicazione f è diagonalizzabile;

2. posto $\alpha = -1$, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di f.

Esercizio 12. Determinare, se possibile, una matrice ortogonale diagonalizzante la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzioni

1. Gli autovalori di A sono $2, 0, 3$, dunque A è diagonalizzabile. La forma diagonale di A è $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ed una matrice diagonalizzante è $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. A e B non sono simili.

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$. A ha autovalori 0 con molteplicità algebrica e geometrica due e -1 con molteplicità algebrica (e geometrica) uno, dunque è diagonalizzabile.

   Una matrice diagonalizzante è $H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $0 < t < 2$

5.

6. D ha un solo autovalore 0 con molteplicità algebrica 4 e molteplicità geometrica 1, dunque non è diagonalizzabile. $V_0 = \langle 1 \rangle$.

7. f è diagonalizzabile.

8. f è diagonalizzabile per ogni $\alpha \neq 2$. Per $\alpha \neq 0, 2$ una base di autovettori di f è: $\{(1, 0, -1), (1, 0, 1), (\alpha + 1, \alpha - 2, 2\alpha - 1)\}$; per $\alpha = 0$ una base di autovettori di f è: $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. Una base ortonormale di autovettori di f esiste se e solo se $\alpha = 0$, in tal caso essa è: $\{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\}$.

9. $\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$.

10. A è diagonalizzabile. $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

11. $\alpha < 1/4$; $\{(0,0,1), \frac{(1-\sqrt{5},2,0)}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \frac{(2,-1+\sqrt{5},0)}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\}$.

12. $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.