Esercizi
Corso di Algebra Lineare
Informatica per il Management
27 marzo 2012

Esercizio 1. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | b = -c \right\}$.

1. Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.
2. Determinare una base $\mathcal{B}$ di S.
3. Completare $\mathcal{B}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$ in due modi diversi.
4. Esibire un insieme di generatori di S che non sia una base di S.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{(1, t), (-t, -1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Calcolare le coordinate del vettore $(2, 1)$ rispetto alla base corrispondente ad uno dei valori trovati.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da: $f(x, y, z) = (2x - y, 4x - 2y)$.

1. Verificare che la funzione f è lineare.
2. Determinare una base di $\ker f$. La funzione f è iniettiva?
3. Determinare una base di Imf. La funzione f è suriettiva?
4. Determinare, se possibile, due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$ aventi la stessa immagine mediante f.

Esercizio 4. Siano $S_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | ka - b + d = k \right\}$ e $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | b = c \right\}$.

1. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme S_k è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.
2. Per i valori trovati in 1. determinare una base di S_k.
3. Per i valori trovati in 1. determinare una base di $S_k \cap T$ e completarla in una base di T.

Esercizi
Corso di Algebra Lineare
Informatica per il Management
3 aprile 2012

Esercizio 1. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono lineari:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 1, 2y)$;
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$;
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y, z) = (x + y - z, x + 3y)$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito da: $f(x, y, z) = (x + y + 3z, y + 2z, 3x + 3z)$.

1. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel codominio).
2. Determinare una base del nucleo di f. La funzione f è iniettiva?
3. Determinare una base dell'immagine di f. La funzione f è suriettiva?

Esercizio 3. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice di un endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel codominio).

1. Determinare, se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che f_k sia iniettiva e/o suriettiva.
2. Determinare nucleo e immagine di f_k al variare di k in $\mathbb{R}$.
3. Posto $k = 2$ completare una base di $\ker(f_2)$ in una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Sia $g : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$g(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, a + 2b + c).$$

1. Scrivere la matrice associata a g rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare nucleo e immagine di g.

3. Esistono vettori linearmente dipendenti di $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ aventi la stessa immagine mediante g?

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da:

$$f(x, y) = (x + 2y, x - y, 2x + y).$$

Siano $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$ e $\mathcal{C}_k = \{(1, 1, k), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$.

1. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{C}_k$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
2. Fissato uno dei valori di k trovati in 1., scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}_k$.
3. Posto $S = \langle(1, 1)\rangle$, determinare una base del sottospazio $f(S)$.

Esercizi
Corso di Algebra Lineare
Informatica per il Management
17 aprile 2012

Esercizio 1. Mostrare che esiste un'unica funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(1,1) = (1,1)$, $f(2,-2) = (-2,2)$ e $f(4,0) = (0,4)$. Scivere la matrice associata a f rispetto alla base $\{(1,1),(2,-2)\}$ nel dominio e nel codominio. Scrivere poi la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ sia nel dominio che nel codominio.

Esercizio 2. Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da: $f(x,y) = (2x - y, y, 3x + 3y)$.

1. Determinare nucleo e immagine di f.
2. Costruire, se possibile, una funzione lineare $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, diversa da f, tale che $\ker h = \ker f$ e $Imh = Imf$.
3. Esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker g = Imf$ e $Img = \ker f$? In caso affermativo costruire g.

Esercizio 3. Costruire, se possibile, una funzione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker \varphi = \langle (1,1,0),(1,-1,0) \rangle$ e $Im\varphi = \langle (1,1) \rangle$. Una siffatta funzione è unica? In caso negativo costruire un'altra funzione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

Esercizio 4.

(a) Quante sono le funzioni lineari $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(1) = 1$?

(b) Quante sono le funzioni non lineari $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $g(1) = 1$?

Esercizio 5. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(1,2,1) = (1,0,1)$, $f(1,-1,1) = (1,k,k)$, $f(2,k,2) = (2,1,2)$. Esiste un'unica funzione lineare soddisfacente le condizioni richieste? Dare la definizione esplicita ($f(x,y,z) = \ldots$) di una funzione lineare f soddisfacente le condizioni richieste e scrivere la matrice ad essa associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio).

Esercizi
Corso di Algebra Lineare
Informatica per il Management
24 aprile 2012

Esercizio 1. Risolvere il seguente sistema lineare nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Risolvere ora lo stesso sistema lineare interpretandolo come un sistema nelle variabili x, y, z, t.

Esercizio 2. Risolvere, al variare del parametro reale a, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, w:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 4w = 0 \\ 2x + y - 3w = 0 \\ ay - 2z + w = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x + 2y + 5t = 0 \\ 2x + 5y + 11t = 4 \\ x + y + (k^2 - k)z + (5 - k^2)t = -k^2 - 3 \\ -y + 2(k^2 - k)z + (3k^2 - 4)t = 2(k^2 + k - 4) \end{cases}$$

Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui sono infinite.

Esercizio 4. Determinare i valori del parametro reale a per i quali i seguenti sistemi lineari sono equivalenti:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z = 0 \\ ax + y - az - 1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia L l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $L(1, 1, 2) = (1, 0, 0)$, $L(1, 3, 0) = (1, 0, 0)$, $L(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$. Calcolare la preimmagine mediante L del vettore $(3, 1, 1)$.

Esercizi
Corso di Algebra Lineare
Informatica per il Management
8 maggio 2012

Esercizio 1. Sia
$$A_k = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$
la matrice associata ad un endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica. Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo f_k è iniettivo e/o suriettivo e determinare una base di $\ker f_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Stabilire se la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è invertibile e calcolarne l'inversa.

Esercizio 3. Sia
$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
la matrice di una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcolare la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ del cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ alla base $\mathcal{B}$.

(b) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Siano $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici associate, rispettivamente, agli endomorfismi f e g di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica. Determinare nucleo e immagine delle applicazioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizi
Corso di Algebra Lineare
Informatica per il Management
15 maggio 2012

Esercizio 1. Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se essa è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ed in caso affermativo scrivere la forma diagonale di A ed una matrice diagonalizzante.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(a, b, c) = (0, a + 3b - 2c, 2a + 6b - 4c).$$

1. Calcolare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.

2. Determinare gli autovalori di A e dire se A è diagonalizzabile; in caso affermativo trovare una matrice diagonalizzante.

Esercizio 3. Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e l'operatore di derivazione $D : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ che associa ad ogni polinomio la sua derivata prima (rispetto ad x). Determinare gli autovalori di D e calcolare i relativi autospazi. Stabilire se D è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovarne la forma diagonale.

Esercizio 4. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per ciascuno dei valori trovati determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.

Esercizi
Corso di Algebra Lineare
Informatica per il Management
22 maggio 2012

Esercizio 1. Discutere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + y = -1 \\ x + ky = -2 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

Esercizio 2. Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ -1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Si determinino, per ogni valore di α, $\ker f_\alpha$, Imf_α e le loro dimensioni.

(b) Si determinino i valori di α per cui f_α non è suriettiva.

(c) Per i valori di α di cui al punto (b) si dica se f_α è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $v_1 = (0, 0, 1, 1)$, $v_2 = (2, -1, -1, 3)$, $v_3 = (-4, 2, 4, -4)$, $w_1 = (1, 1, 0, 0)$, $w_2 = (-2, 1, 2, -2)$, $w_3 = (6, 0, -4, 4)$.

(a) Indicati con S il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3, e con T il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori w_1, w_2, w_3, si determinino una base di S, una base di T e si calcolino le loro dimensioni.

(b) Si dica se $S = T$.

(c) $S \cup T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Si determini una base di $\langle S \cup T \rangle$.

(d) Si dica se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$. Tale endomorfismo è unico?