Esercizi
Corso di Algebra Superiore, a.a. 2017-18
Laurea Magistrale in Matematica
Docente: Nicoletta Cantarini

28 settembre 2017

1. Mostrare che $\mathbb{R}^3$ con il prodotto vettoriale è un'algebra di Lie.
2. Mostrare che non esistono algebre di Lie semplici di dimensione due.
3. Mostrare che l'ideale derivato di $gl(n)$ è $sl(n)$.

5 ottobre 2017

1. Sia $\varphi : L \to M$ un omomorfismo di algebre di Lie. Mostrare che $\ker(\varphi)$ è un ideale di L e che $Im(\varphi)$ è una sottoalgebra di Lie di M.
2. Determinare l'ideale derivato dell'algebra di Lie $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ delle matrici triangolari superiori di ordine n.
3. Sia $L = \langle X, H, Y \rangle$ un'algebra di Lie di dimensione tre su $\mathbb{C}$ tale che:
$$[H, X] = \alpha X, \quad [H, Y] = -\alpha Y, \quad [X, Y] = \lambda H$$
per certi $\alpha, \lambda \in \mathbb{F}$ non nulli. Mostrare che L è isomorfa a $sl(2, \mathbb{C})$.
4. Mostrare che il sottospazio S di $W(n) = der(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$:
$$S = \langle x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \mid i, j = 1, \dots, n \rangle$$
è una sottoalgebra di Lie di $W(n)$ isomorfa a $gl(n)$.
5. Sia $\mathbb{F}$ un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero e siano e, f, h i generatori standard di $sl(2, \mathbb{F})$. Sia V un $sl(2, \mathbb{F})$-modulo e sia $v \in V$ un vettore di peso più alto λ. Mostrare che valgono in V le seguenti formule ($r \in \mathbb{Z}_+$):
   i) $h.e^r.v = (\lambda + 2r)e^r.v$;
   ii) $h.f^r.v = (\lambda - 2r)f^r.v$;
   iii) $e.f^r.v = r(\lambda - r + 1)f^{r-1}.v$.

13 ottobre 2017

1. Data una sottoalgebra K di un'algebra di Lie L, sia

$$N_L(K) = \{x \in L \mid [x, K] \subset K\}.$$

   Mostrare che $N_L(K)$ è una sottoalgebra di Lie di L.

2. Sia L un'algebra di Lie.
   (a) Mostrare che se I e J sono ideali nilpotenti di L allora anche $I+J$ è un ideale nilpotente di L.
   (b) Stabilire se è vero che, dato un ideale nilpotente I di L tale che L/I sia nilpotente, allora anche L è nilpotente.

3. Sia L un'algebra di Lie su $\mathbb{C}$. Mostrare che L è nilpotente se e solo se ogni sottoalgebra di dimensione due di L è commutativa.

20 ottobre 2017

1. Sia $L = sl(V)$. Dimostrare che L è semisemplice. (Suggerimento: Mostrare che il radicale di L è contenuto in ogni sottoalgebra risolubile massimale B di L; scegliere una base di V tale che $B = L \cap t(n, \mathbb{F})$ e notare che la sottoalgebra di L costituita dalle matrici triangolari inferiori è anch'essa una sottoalgebra massimale di L; concludere che il radicale di L è contenuto nella sottoalgebra delle matrici diagonali di L e dunque è nullo.)

2. Sia L un'algebra di Lie di dimensione 4 con base $\{x, y, z, t\}$ e prodotto definito da

$$[x, t] = [y, z] = [z, t] = 0, \ [x, y] = y, \ [x, z] = z, \ [y, t] = z;$$

   (a) Verificare che L è risolubile;
   (b) Determinare un'algebra di Lie lineare isomorfa ad L.

26 ottobre 2017

1. Siano V un $\mathbb{F}$-spazio vettoriale di dimensione finita, $\alpha : V \times V \to \mathbb{F}$ una forma bilineare su V ed U un sottospazio vettoriale di V. Mostrare che:

   (a) se α è non degenere allora $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$;
   (b) $V = U \oplus U^\perp$ se e solo se la restrizione di α ad U è non degenere.

2. Sia L un'algebra di Lie semisemplice. Mostrare che $L = [L, L]$ e che ogni immagine omomorfa di L è semisemplice.

3 novembre 2017

1. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale V (di dimensione finita). Sia W un sottospazio di V tale che $f(W) \subset W$. Mostrare che $f_{|W}$ è diagonalizzabile.

2. Siano f e g endomorfismi diagonalizzabili di uno spazio vettoriale V tali che $f \circ g = g \circ f$. Mostrare che f e g sono contemporaneamente diagonalizzabili.

3. Mostrare che un L-modulo V è irriducibile se e solo V^* è un L-modulo irriducibile.

4. Determinare la decomposizione di Jordan dell'endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ la matrice associata al quale, rispetto alla base canonica, è
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia β una forma bilineare non degenere su V. Sia $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ una base di V. Mostrare che esiste un'unica base $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_n\}$ di V tale che $\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$.

10 novembre 2017

1. Mostrare che un L-modulo V è completamente riducibile se e solo se per ogni sottomodulo proprio W di V esiste un sottomodulo W' tale che $V = W \oplus W'$.

2. Sia L l'algebra di Lie delle matrici triangolari superiori di ordine n. Mostrare che la rappresentazione standard di L non è completamente riducibile.

3. Siano $V(2)$ e $V(3)$ $sl(2)$-moduli irriducibili di dimensione 3 e 4, rispettivamente. Decomporre $V(2) \otimes V(3)$ in somma diretta di $sl(2)$-sottomoduli irriducibili.

17 novembre 2017

1. Data $A \in gl(n, \mathbb{F})$, sia
$$gl_A(n, \mathbb{F}) = \{X \in gl(n, \mathbb{F}) \mid AX = -X^t A\}.$$
Mostrare che $gl_A(n, \mathbb{F})$ è una sottoalgebra di $gl(n, \mathbb{F})$ e che se A è invertibile allora $gl_A(n, \mathbb{F}) \subset sl(n, \mathbb{F})$.

2. Sia s la matrice $2\ell \times 2\ell$ definita a blocchi da: $s = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{bmatrix} \in gl(2\ell, \mathbb{F})$. Consideriamo l'algebra di Lie simplettica
$$\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell, \mathbb{F}) : \, sx = -x^t s\}$$
e assumiamo che essa sia semisemplice.
   (a) Verificare che $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{F})$ ha dimensione 10 su $\mathbb{F}$ e determinarne una base.
   (b) Verificare che la sottoalgebra delle matrici diagonali in $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{F})$ è una sottoalgebra torale massimale.
   (c) Verificare che l'insieme delle radici Φ di $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{F})$ rispetto ad H può essere descritto nel modo seguente:
$$\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha + \beta), \pm(2\alpha + \beta)\}.$$

3. Sia s la matrice $2\ell \times 2\ell$ definita a blocchi da $s = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ I_\ell & 0 \end{bmatrix}$. Consideriamo l'algebra di Lie ortogonale
$$\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell, \mathbb{F}) : \, sx = -x^t s\}.$$
   a) Verificare che $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{F})$ ha dimensione $2\ell^2 - \ell$ su $\mathbb{F}$.

   Sia ora $\ell = 2$ e sia H la sottoalgebra di Lie costituita dalle matrici diagonali in $L = \mathfrak{o}(4, \mathbb{F})$.

   b) Determinare una base di L.
   c) Utilizzando la rappresentazione aggiunta di H su L, verificare che L è somma diretta di due copie di $\mathfrak{sl}_2$ (come algebra di Lie) e concludere che L è semisemplice.

24 novembre 2017

1. Mostrare che non esistono algebre di Lie semisemplici di dimensione 4, 5 e 7.
2. Sia $L = \mathfrak{o}(5)$.
   (a) Calcolare la dimensione di L ed esibire una sua base. Descrivere il sistema di radici di L.
   (b) Mostrare che L è isomorfa a $\mathfrak{sp}(4)$.

1 dicembre 2017

1. Determinare il diagramma di Dynkin di $sl(4)$.
2. Costruire il sistema di radici di tipo B_3.
3. Dimostrare che il gruppo di Weyl di $sl(3)$ è isomorfo a S_3.