

Algebra Superiore, a.a. 2017/18

Registro delle lezioni

28/09/2017

- Algebre, algebre associative, algebre di Lie
- Sottoalgebre di Lie, omomorfismi, ad
- Esempi di algebre di Lie: algebre di Lie commutative, $\mathfrak{gl}(n,F)$, $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{sl}(n,F)$
- Ideali. Esempi: il centro e la sottoalgebra derivata
- Algebre di Lie semplici
- L'algebra $\mathfrak{sl}(2,F)$

05/10/2017

- Esercizi
- Algebre di Lie di dimensione due
- Algebre di Lie di dimensione tre: esempi
- Caratterizzazione di $\mathfrak{sl}(2,C)$ come algebra di Lie di dimensione 3 tale che $L=[L,L]$

06/10/2017

- Derivazioni. Algebre di derivazioni. $\text{Der}(C[x_1, \dots, x_n])$
- Rappresentazione di un'algebra di Lie. Esempi: la rappresentazione banale, la rappresentazione aggiunta, la rappresentazione standard di $\mathfrak{sl}(n)$ e $\mathfrak{gl}(n)$
- Rappresentazioni irriducibili: definizione, esempi e controesempi
- Rappresentazioni irriducibili di dimensione finita di $\mathfrak{sl}(2)$ su un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero

12/10/2017

- Esercizi
- Costruzione delle rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{sl}(2)$ di dimensione finita
- Rappresentazioni isomorfe
- Algebre di Lie nilpotenti: definizione, esempi e controesempi

13/10/2017

- Proprietà delle algebre di Lie nilpotenti
- Teorema di Engel

19/10/2017

- Esercizi
- Corollari del Teorema di Engel.
- Algebre di Lie risolubili e loro proprietà. Esempi e controesempi.
- Il radicale di un'algebra di Lie.
- Algebre di Lie semisemplici: definizione, esempi.

20/10/2017

- Teorema di Lie.
- Forma di Killing. Esempio di $sl(2)$.
- Caratterizzazione di un'algebra di Lie semisemplice attraverso la forma di Killing.

26/10/2017

- Esercizi
- Semisemplicità di $sl(n)$
- Algebre di Lie semisemplici come somma di ideali semplici
- Derivazioni di un'algebra di Lie semisemplice

02/11/2017

- Esercizi
- Decomposizione di Jordan Chevalley
- Il modulo duale
- Prodotto tensoriale di moduli
- $\text{Hom}(V, W)$

03/11/2017

- Decomposizione di Jordan astratta
- Il Lemma di Schur
- L'operatore di Casimir e le sue principali proprietà

08/11/2017

- Esercizi

09/11/2017

- Rappresentazioni completamente riducibili
- Il Teorema di Weyl

10/11/2017

- Coincidenza tra decomposizione di Jordan astratta e decomposizione usuale in un'algebra di Lie semisemplice lineare
- Componenti irriducibili in un $sl(2)$ -modulo di dimensione finita
- Sottoalgebre torali
- Decomposizione di Cartan

16/11/2017

- Esercizi
- Decomposizione di Cartan di $sl(2)$ e $sl(3)$

17/11/2017

- Proprietà del sistema di radici di un'algebra di Lie semisemplice

23/11/2017

- Esercizi: sistemi di radici di $sp(4)$ e $o(4)$.
- Algebre di Lie riduttive: definizione ed esempi.

24/11/2017

- Criterio di semisemplicità.
- La semisemplicità delle algebre di Lie classiche.
- Stringhe di radici.
- Forma bilineare su H^* .
- Costruzione dello spazio euclideo generato dal sistema di radici.

30/11/2017

- Esercizi.
- Sistemi di radici astratti.
- Costruzione dei sistemi di radici di rango uno e due.

01/12/2017

- Proprietà dei sistemi di radici astratti.
- Vettori regolari.
- Camere di Weyl.
- Basi di un sistema di radici.
- Grafi di Coxeter.
- Diagrammi di Dynkin.

04/12/2017

- Il gruppo di Weyl e alcune sue proprietà.

07/12/2017

- Esercizi: il diagramma di Dynkin di $sl(n)$, il sistema di radici di tipo B_3 , il gruppo di Weil di $sl(3)$.
- Il diagramma di Dynkin non dipende dalla base.
- Isomorfismi di sistemi di radici.
- Il diagramma di Dynkin determina univocamente il sistema di radici a meno di isomorfismi.

11/12/2017

- Sistemi di radici irriducibili e loro caratterizzazione in termini di basi e di diagrammi di Dynkin.
- Un'algebra di Lie semisemplice è semplice se e solo se il suo diagramma di Dynkin è connesso.

15/12/2017

- Classificazione dei sistemi di radici irriducibili. Un'idea della dimostrazione.
- Costruzione esplicita del sistema di radici di tipo A_n .
- Teorema di isomorfismo e un'idea della dimostrazione.
- Teorema di Serre (solo enunciato).