Teorema Sia V un $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale di dimensione n e sia $f \in End(V)$. Supponiamo che il polinomio minimo $q_f(t)$ abbia tutte le radici in $\mathbb{K}$. Allora f è diagonalizzabile se e solo se $q_f(t)$ è libero da quadrati cioè della forma $q_f(t) = (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)$.

Dimostrazione Sia f diagonalizzabile con autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Poiché ogni autovalore è radice di $q_f(t)$ abbiamo

$$(t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k) \mid q_f(t).$$

Per mostrare che vale l'uguaglianza basta allora mostrare che il polinomio $(t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_k)$ si annulla in f (infatti $q_f(t)$ è il polinomio monico di grado minimo che si annulla in f). Consideriamo dunque l'endomorfismo

$$(f-\lambda_1 I)\circ \dots \circ (f-\lambda_k I) \in End(V).$$

Esso è nullo se e solo se si annulla su ogni vettore di una base di V. Essendo f diagonalizzabile posso scegliere una base costituita da autovettori di f. Sia v_i un autovettore relativo a λ_i. Allora:

$$\underbrace{(f-\lambda_1 I)\circ\dots\circ(f-\lambda_k I)}_{\text{commutano!}}(v_i)=(f-\lambda_1 I)\dots(f-\lambda_{i-1} I)(f-\lambda_{i+1} I)\dots(f-\lambda_k I)\underbrace{(f-\lambda_i I)(v_i)}_{=0}$$

$$= 0.$$

Dunque $(f-\lambda_1 I)\circ\dots\circ(f-\lambda_k I)=0$ e

$$q_f(t)=(t-\lambda_1)\dots\dots(t-\lambda_k).$$

Viceversa, supponiamo che $q_f(t)=(t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_k)$ e vogliamo dimostrare che f è diagonalizzabile, cioè, che $V=V_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus V_{\lambda_k}$ è somma diretta di autospazi. Sappiamo che V è somma diretta degli autospazi generalizzati:

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}.$$

Basterà allora dimostrare che per ogni autovalore λ_i si ha $V^{\lambda_i} = V_{\lambda_i}$. Sappiamo del resto che vale sempre l'inclusione $V_{\lambda_i} \subseteq V^{\lambda_i}$.

Sia dunque $w \in V^{\lambda_i}$. Sappiamo che $q_f(f) = 0$ quindi

$$0 = q_f(f)(w) = (f - \lambda_1 I) \circ \dots \circ (f - \lambda_k I)(w) =$$

$$= (f - \lambda_1 I) \circ \dots \circ (f - \lambda_{i-1} I) \circ (f - \lambda_{i+1} I) \circ \dots \circ (f - \lambda_k I) \circ (f - \lambda_i I)(w)$$

Ricordiamo che 1) ogni autospazio generalizzato è f-invariante, quindi $(f - \lambda_j I)$-invariante $\forall j$;

2) la restrizione di $f - \lambda_j I$ a V^{λ_i} è invertibile

$\forall j \neq i$.

Quindi, poiché $w \in V^{\lambda_i}$, per 1), anche $(f-\lambda_i I)(w) \in V^{\lambda_i}$ ma per 2) la restrizione di $(f-\lambda_1 I)\circ \dots \circ (f-\lambda_{i-1} I)\circ (f-\lambda_{i+1} I)\circ \dots \circ (f-\lambda_k I)$ a V^{λ_i} è iniettiva, quindi $(f-\lambda_i I)(w)=0$ cioè $w \in V_{\lambda_i}$.

Abbiamo quindi dimostrato che $\forall i=1,\dots,k$, $V^{\lambda_i}=V_{\lambda_i}$ $\square$

Nota per gli studenti dell' a.a. 2023/24

Quando vi ho proposto questa dimostrazione non conoscevate ancora il Teorema di decomposizione primaria. Grazie ad esso l'implicazione $(\Leftarrow)$ si semplifica notevolmente. Infatti poiché si ha

$$q_f(t) = (t-\lambda_1)\cdot \dots \cdot (t-\lambda_k)$$

e gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono distinti,

$$V = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_k I)$$

cioè V è somma diretta di autospazi

(i.e., f è diagonalizzabile).