Osservazione preliminare

La matrice in forma canonica di Jordan di un endomorfismo f è individuata:

a) dai suoi autovalori

b) per ogni autovalore λ_i dalla successione

$\dim \ker(f-\lambda_i I)$, $\dim \ker(f-\lambda_i I)^2$, ..., $\dim \ker(f-\lambda_i I)^{n_i}$ con

n_i = molt. algebrica di λ_i.

$\to$ Ad ogni autovalore è associato quindi una partizione di n_i cioè un diagramma di Young.

Due matrici in forma canonica di Jordan con gli stessi autovalori ma diverse differiscono per almeno una di queste partizioni.

<u>Teorema</u> Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso, sono simili se e solo se sono simili alla stessa matrice in forma canonica di Jordan.

<u>Dim.</u> Se A, B sono simili alla stessa matrice in forma canonica di Jordan, allora sono simili per transitività.

Viceversa, se $H^{-1}AH = B$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi gli stessi autovalori. Inoltre, per ogni autovalore λ_i si ha

$H^{-1}(A - \lambda_i I) H = B - \lambda_i I$ e, di conseguenza

$H^{-1}(A - \lambda_i I)^k H = (B - \lambda_i I)^k$ cioè le matrici $(A - \lambda_i I)^k$ e $(B - \lambda_i I)^k$ sono simili. Dunque, $\forall k$, si ha

$$\operatorname{rg}(A - \lambda_i I)^k = \operatorname{rg}(B - \lambda_i I)^k \implies$$

$$\dim \operatorname{Ker} (A - \lambda_i I)^k = \dim \operatorname{Ker} (B - \lambda_i I)^k.$$

Poiché gli autovalori e le successioni di queste dimensioni determinano una ed una sola matrice in forma canonica di Jordan, la dimostrazione è conclusa.

$\square$