DUE PAROLE SULLE FUNZIONI TRA INSIEMI

Siano A, B due insiemi che supporremo non vuoti (per non complicarci la vita)

Def. Una funzione, o applicazione, $f: A \to B$ associa, a ogni elemento $a \in A$ un elemento (e uno solo) $f(a) \in B$. (l'immagine di a mediante f)

N.B. il dato della funzione comprende A (= dominio) e B = (codominio)

A volte una funzione o applic. si dice una mappa:
"f mappa A in B". Bruttino ....

Es. 1 Se $B = A$ la funzione identità, che si indica id_A o 1_A è definita: $id_A(a) = a \ \forall a \in A$.

Es. 2
Se $A' \subseteq A$ è data la funzione di inclusione $i : A' \to A$

$i(a') = a'$ pensato come elemento di A.

pensato come el.to di A'

Es. 3 se $\sim$ è una rel. d'equiv. su A è data la funzione di proiezione $\pi : A \to A/_\sim$

definita: $\pi(a) = [a]$.

Ad una applicazione $f : A \to B$ sono associati, in modo naturale, un sottoinsieme di B e una rde su A:

Def. Data $f : A \to B$

$f(A) = \{ b \in B$ t.c. $\exists\, a \in A$ con $f(a) = b \}$ si dice l'immagine di A. È un sottoinsieme di B. Si ha l'inclusione $i_f : f(A) \to B$

Def. Data $f : A \to B$ definiamo

$a_1 \underset{f}{\sim} a_2$ quando $f(a_1) = f(a_2)$

Es. (facile) $\underset{f}{\sim}$ è una relazione d'equivalenza.

Sia $A/\underset{f}{\sim}$ l'insieme quoziente relativamente a tale relazione

e $\pi_f : A \longrightarrow A/\underset{f}{\sim}$ la relativa proiezione.

Def. Se $\varphi : A \to B$ $\psi : B \to C$

si definisce $\psi \circ \varphi : A \to C$:

$(\psi \circ \varphi)(a) := \psi(\varphi(a))$, e si dice

la composizione di ψ con φ.

OSS. per ogni $f : A \to B$ si ha

$$f \circ id_A = f \quad \text{e} \quad id_B \circ f = f.$$

Esercizio importante:

Sia $f : A \to B$ siano

$f(A)$ e $\sim_f$ definite come

sopra e siano $f(A) \xrightarrow{i_f} B$

e $\pi_f : A \to A/\sim_f$

Esiste, unica $\Phi : A/_{\sim_f} \longrightarrow f(A)$

t.c. $f : A \to B$ è la composizione

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & A/_{\sim_f} \arrow[r, "\Phi"] & f(A) \arrow[r, "i_f"] & B \end{tikzcd}$$

(FATTORIZZAZIONE CANONICA DI f)

(Φ è definita

$\Phi([a]) := f(a)$. Mostrare

che questa è una buona definizione, e che è l'unica funzione $A/_{\sim_f} \xrightarrow{\Phi} f(A)$ t.c.

$f = i_f \circ \Phi \circ \pi_f$.

Def. $f : A \to B$ si dice INIETTIVA se $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

(el. distinti vengono portati in el. distinti)

Equivalentemente $\underset{f}{\sim}$ è la relazione di uguaglianza, $A/\underset{f}{\sim} = A$ e $\pi_f = id_A$.

Spesso per ricordare che una funzione è iniettiva si indica $\hookrightarrow$.

OSS. ① Se $A' \subseteq A$ l'inclusione $i : A' \hookrightarrow A$ è sempre iniettiva.

Def. $f: A \to B$ si dice SURIETTIVA se per ogni elemento $b \in B$ esiste un $a \in A$ con $f(a) = b$

Equivalentemente $f(A) = B$ e $i_f = id_{f(A)}$.

Spesso per ricordare che una funzione è suriettiva si indica $\twoheadrightarrow$.

OSS. Se $\sim$ è una rel.e su A, allora

$$\pi: A \to A/\sim$$ è suriettiva.

Def. $f: A \to B$ si dice BIIETTIVA o biunivoca se è INIETTIVA e SURIETTIVA. Equivalentemente $\forall b \in B \ \exists! a$ t.c. $f(a) = b$

Equivalentemente $f(A) = B$ e $\underset{f}{\sim}$ è l'uguaglianza.

Se f è biiettiva esiste una $f^{-1}: B \to A$ t.c.

$f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$.

che si dice la funzione inversa di f.

OSS. Data $f : A \to B$ qualunque, se $B' \subseteq B$ si indica

$$f^{-1}(B') = \{ a \in A \text{ t.c. } f(a) \in B' \}$$

e si dice controimmagine o retroimmagine di B'.

Se $b \in B$ $f^{-1}(\{b\})$ si indica $f^{-1}(b)$ ed è un sottoinsieme di A (eventualmente vuoto) anche se $\{b\}$ ha un solo elemento

questa è solo notazione.

In generale, cioè se f non è biunivoca, non esiste f^{-1}, quindi $f^{-1}(B')$ NON È la (inesistente) funzione f^{-1}

applicata a B'.

<u>OSS</u> $\forall a \in A \quad [a]_f = f^{-1}(f(a))$

Torniamo alla fattorizzazione canonica

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & A/_{\sim_f} \arrow[r, "\Phi"] & f(A) \arrow[r, "i_f"] & B \end{tikzcd}$$

<u>Eserc.</u> Φ BIUNIVOCA

$\Phi \circ \pi_f$ SURIETTIVA

$i_f \circ \Phi$ INIETTIVA.

Quindi "una funzione si può rendere suriettiva cambiando il codominio, cioè considerando

$$\hat{f} : A \longrightarrow f(A)$$

è iniettiva cambiando il

dominio, cioè $A/_{\sim_f} \xrightarrow{F} B$.

(biunivoca cambiandoli tutti e due).

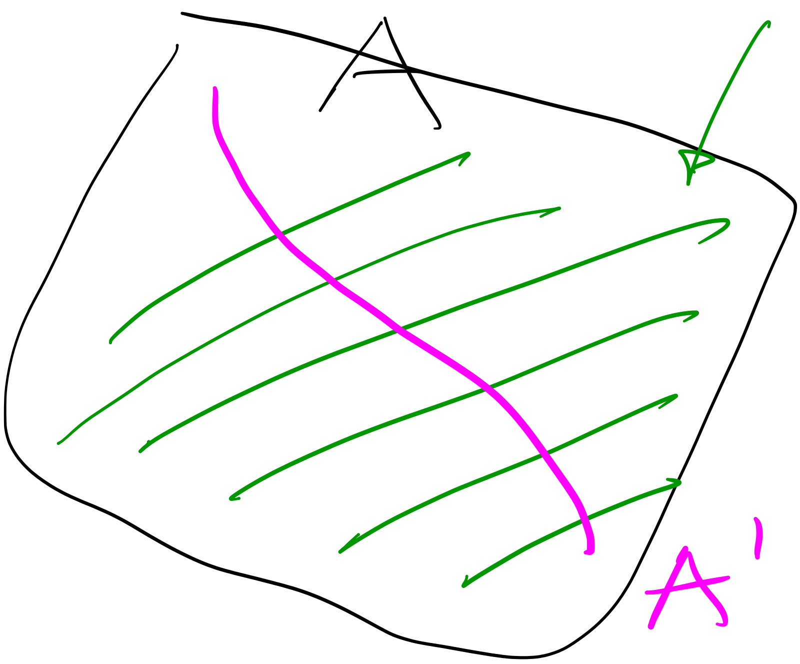
Ci si può chiedere se invece che introdurre un quoziente di A si può semplicemente prendere un sottoinsieme di A.

Def. Se $A' \subseteq A$ e $i_{A'} : A' \to A$ è l'inclusione, si dice restrizione di f ad A', indicata $f|_{A'}$, la funzione

$f \circ i_{A'}$. In altre parole:

$$f_{|_{A'}}(a) = f(a) \quad \text{se } a \in A'$$

Domanda: data $f : A \to B$ esiste un sottoinsieme $A' \hookrightarrow A$ t.c. $f_{|_{A'}} : A' \to B$ sia iniettiva? (e quindi $\hat{f}_{|_{A'}} : A' \to f(A)$ biunivoca?)



le classi di equivalenza di $\underset{f}{\sim}$

Se trovo un sottoinsieme A' che interseca ogni classe d'equivalenza in uno e un solo elemento $\Rightarrow$

$f|_{A'}$ è iniettiva,

In molti casi la scelta di un tale A' (sezione, o SLICE di f) è sottile, e in generale A' non è unico. Tra qualche settimana troveremo una situazione di questo tipo nel "teorema del rango".

(oss: $\pi_{|_{A'}} : A' \longrightarrow A/_{\sim}$

è biunivoca se A' soddisfa le condizioni evidenziate in giallo)

Es. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$. Allora

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. $x \sim_f y \iff x = \pm y$

una sezione $A' \subseteq \mathbb{R}$ può essere ad esempio $A' = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Esercizio Trovare altri sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ t.c. la restrizione di f a tali sottoinsiemi sia iniettiva.

Queste sono proprietà standard, molto utili. Consigliamo di verificarle per esercizio.

1) $f: A \to B \quad g: B \to C$

f, g iniettive $\Rightarrow g \circ f$ iniettiva

" " suriettive $\Rightarrow$ " suriettiva

" " biunivoche $\Rightarrow$ " biunivoca

2) $f: A \to B$

f iniettiva sse $\exists\, g: B \to A$ t.c. $g \circ f = id_A$

f suriettiva sse $\exists\, g: B \to A$ t.c. $f \circ g = id_B$

3) $f: A \to B \quad g: B \to C$

$g \circ f$ iniettiva $\Rightarrow f$ iniettiva

" suriettiva $\Rightarrow g$ suriettiva

4) • $f: A \to B$ iniettiva se e solo se per ogni insieme Z e coppia di funzioni $Z \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} A$ si ha

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \iff g_1 = g_2 .$$

• $f: A \to B$ suriettiva se e solo se per ogni insieme Z e coppia di funzioni $B \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} Z$ si ha

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \iff g_1 = g_2 .$$

(L' esercizio 2 è utile per fare questo esercizio)

5). Sia $f : A \longrightarrow B$

e sia $\sim$ una rel e su A,

con $\pi : A \longrightarrow A/\sim$.

esiste F t.c. $f = F \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A/\sim \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1 \sim a_2 \Longrightarrow f(a_1) = f(a_2)$$

formulare tale proprietà in termini di confronto tra

$\sim$ e $\underset{f}{\sim}$.

• Analogamente se $B' \subseteq B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "F"'] & & B \\ & B' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

F esiste

$$\Updownarrow$$

$$B' \supseteq f(A)$$